



آزمون تابستان «۱۶ مرداد ۱۴۰۵» دفترچه اول اختصاصی دوازدهم ریاضی (ریاضیات)

دفترچه سوال

مدت زمان کل پاسخ‌گویی سوالات: ۱۱۵ دقیقه

تعداد کل سوالات: ۸۰ سؤال

(۳۰ سوال اجباری + ۵۰ سوال اختیاری)

نام درس	تعداد سؤال	شماره سؤال	زمان پاسخ‌گویی
اجباری	۱۰	۱-۱۰	۱۵'
اختیاری	۱۰	۱۱-۲۰	۱۲'
اختیاری	۱۰	۲۱-۳۰	۱۵'
اجباری	۱۰	۳۱-۴۰	۱۵'
اختیاری	۱۰	۴۱-۵۰	۱۳'
اختیاری	۱۰	۵۱-۶۰	۱۵'
اجباری	۱۰	۶۱-۷۰	۱۵'
اختیاری	۱۰	۷۱-۸۰	۱۵'
جمع کل	۸۰	۱-۸۰	۱۱۵'

پدیدآورندگان

نام درس	نام طراحان
ریاضی پایه و حسابان ۲	امیر محمد باقری نصرآبادی - شاهین پروازی - رحمان پوررحیم - عادل حسینی - طاهر دادستانی - وحید راحتی - محمدرضا راسخ سهیل ساسانی - یاسین سپهر - علی سلامت - علی اصغر شریفی - علی شهرابی - حمید علیزاده - معین کرمی - سیدسپهر متولیان لیلی مرادی - حمیدرضا نوش کاران - سهند ولی‌زاده
هندسه و آمار و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب - حنا - اتفاقی - علی احمدی قزل‌دشت - اسحاق اسفندیار - حمیدرضا امیری - علی ایمانی - محبوبه بهادری - فرزاد جوادی - سیدمحمدرضا حسینی - فرد - محمد حمیدی - افشین خاصه‌خان - فرزانه خاکپاش - محمد خندان - کیوان دارابی - مصطفی دیداری - سوگند روشنی - علیرضا شریف‌خطیبی - هومن عقیلی - احمدرضا فلاح - امیرحسین ملازینل - مهرداد ملوندی - حمید ناصر

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	ریاضی پایه و حسابان ۲	هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل
گروه ویراستاری	سینا صالحی آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل
مستند سازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی
ویراستاران (مستندسازی)	معصومه صنعت کار - امیرمحمد علیپور - مهسا محمدنیا - فرشته کمبرانی		

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه، محیا اصغری مسئول دفترچه، علیرضا همایون‌خواه
حروف‌نگار	فرزانه فتح‌الزاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳



وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

حسابان ۱: تابع: صفحه‌های ۳۷ تا ۷۰

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اجباری است.

۱- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

$$x = 2y^3 - 5y + 3 \quad (2)$$

$$x + \sqrt{y+3} = y + 1 \quad (1)$$

$$x = \sqrt[3]{2y - |y|} \quad (4)$$

$$|x + y| - 2x = 1 \quad (3)$$

۲- توابع $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{3-x}$ و $g(x) = -\sqrt{ax^2 + 2x + b}$ مساوی هستند. حاصل ab کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

۳- تابع $f(x) = x - \left[\frac{x}{3}\right]$ با دامنه $(0, 6)$ مفروض است. مساحت سطح بین نمودار تابع f و محور x ها کدام است؟

([]، نماد جزء صحیح است.)

$$16/5 \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$4/5 \quad (1)$$

۴- اگر $f = \{(3, n-2), (m-1, 5), (2, 1), (-2, 5-n), (m^2-m, 1), (3, -2)\}$ تابعی یک به یک باشد، دوتایی مرتب (m, n) کدام است؟

$$(-1, 0) \quad (4)$$

$$(-1, 2) \quad (3)$$

$$(1, 0) \quad (2)$$

$$(1, 2) \quad (1)$$

۵- نمودار تابع وارون پذیر $f(x) = ax^2 + \frac{3}{4}$; $x \geq 0$ بر نمودار وارونش مماس است. مقدار $f^{-1}(12a)$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۶- اگر برای تابع وارون پذیر f ، رابطه $(f \circ f)(x) = \frac{3f(x) - 2}{f(x) - 1}$ برقرار باشد، مقدار $f^{-1}(8)$ کدام است؟

$$1/2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$0/8 \quad (2)$$

$$0/6 \quad (1)$$

۷- اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشد، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$2/5 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1/5 \quad (1)$$

۸- اگر $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ و $g(x) = -\sqrt{x+5}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$18 \quad (4)$$

$$19 \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$10 \quad (1)$$

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 3 \\ 2|x|-1 & ; x < -3 \end{cases}$ و $g(x) = [5x]$ باشد، حاصل $(f-g)(-\frac{7}{4})$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

$$11 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۱۰- فرض کنید $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x-[x]}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5 + |x^5|}$ باشند، اگر برد تابع gof بازه (a, b) باشد، حاصل $2b+a$ کدام است؟

([]، نماد جزء صحیح است.)

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

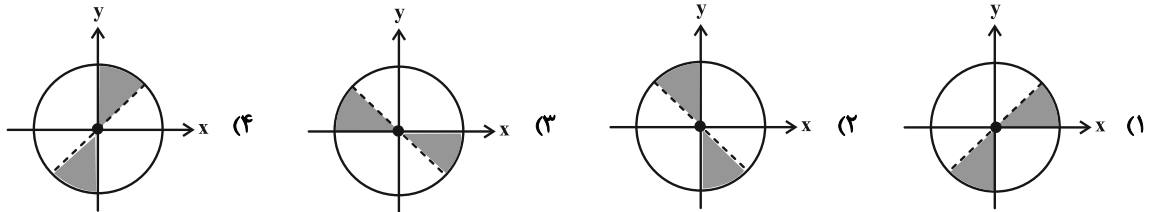
$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

وقت پیشنهادی: ۱۲ دقیقه

ریاضی ۱: مثلثات + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۳۶ تا ۶۸

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۱۱- برای کمان θ در دایره مثلثاتی، روابط $\cos \theta - \cot \theta < 0$ و $\sin \theta < \cos \theta$ برقرار است. وضعیت انتهای کمان θ مطابق کدام شکل است؟۱۲- اگر $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ و α در ربع چهارم باشد، آنگاه حاصل $\frac{\sin \alpha + 0.75}{\tan \alpha + 1}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) 0.75 (۳) -1 (۴) -0.75 ۱۳- اگر α زاویه بین خط به معادله $5x + 2y + 3 = 0$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{7}{5}$ (۴) $-\frac{3}{7}$ ۱۴- اگر $2 \sin x + 3 \cos x = 2$ باشد، مقدار تعریف شده $\tan x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{12}{5}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{3}{4}$ ۱۵- اگر $120^\circ < \alpha < 270^\circ$ و $\cos \alpha = \frac{2m-1}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{3} \leq m < 0$ (۲) $-\frac{1}{3} \leq m < \frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3} < m \leq \frac{1}{2}$ (۴) $0 < m < \frac{1}{3}$ ۱۶- ریشه دوم $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ را a می‌نامیم و ریشه سوم b عدد $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ است. حاصل $a^2 b$ همواره با کدام عبارت برابر است؟
 (۱) a^{-2} (۲) $\frac{a^2}{b}$ (۳) $\sqrt{b}$ (۴) ۱۱۷- اگر $A = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{5}{8}}$ باشد، حاصل $(\Delta A)^9$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۸- کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 < a < 1 &\Rightarrow a^5 > a^2 \\ (2) \quad -1 < a < 0 &\Rightarrow a^6 > a^2 \\ (3) \quad a < -1 \text{ یا } a > 1 &\Rightarrow a^5 > a^4 \\ (4) \quad a < -1 &\Rightarrow a^6 > a^4 \end{aligned}$$

۱۹- اگر $a^2 + b^2 = 8ab$ باشد، حاصل $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ کدام است؟
 (۱) 0.6 (۲) 0.8 (۳) ۱ (۴) 1.2 ۲۰- اگر $A = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}+2\sqrt{6}-\sqrt{4}-2\sqrt{3}}$ باشد، حاصل $(A+1)^2$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

حسابان ۲: تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۸

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۲۱- نقطه $A(2, -1)$ روی نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1) - 1$ ، بعد از تبدیل این نمودار به نمودار تابع $h(x) = f(x + 4) + 1$ ، در کدام

ناحیه دستگاه مختصات قرار می‌گیرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

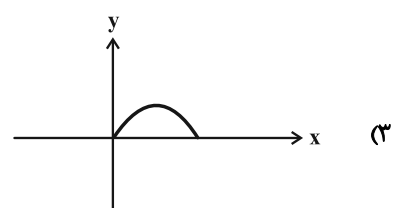
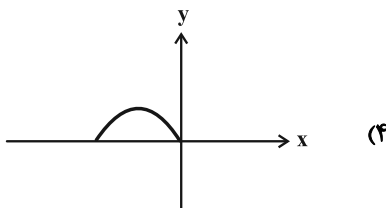
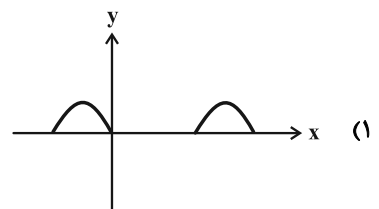
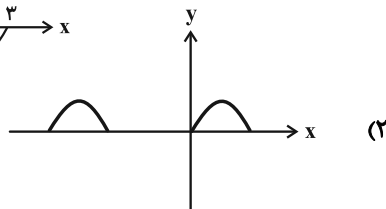
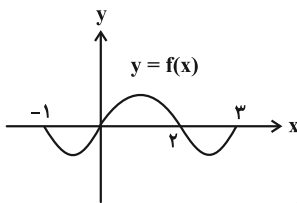
۲۲- طول نقاط نمودار تابع $f(x) = (x + 1)^2$ را دو برابر می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g حاصل شود. مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع f و g کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۲۳- اگر f و g دو تابع با دامنه‌های $D_f = [3, 6]$ و $D_g = [-2, 1]$ باشند، دامنه $h(x) = f(\frac{3x}{4}) - g(x - 3)$ کدام است؟

- (۱) $[2, 4]$ (۲) $[1, 4]$ (۳) $[-2, 6]$ (۴) $[1, 6]$

۲۴- با توجه به نمودار تابع f ، نمودار تابع $g(x) = \sqrt{-f(-x)}|f(-x)|$ کدام است؟



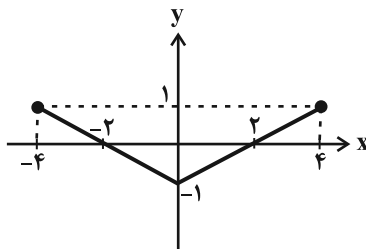
۲۵- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع $y = ||f(x)| - 1|$ و محور x ها کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

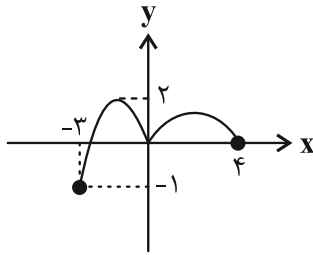
(۳) ۶

(۴) ۸



مشابه سؤال‌هایی که با آیکون  مشخص شده‌اند در امتحانات تشریحی وجود دارد.

۲۶- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 6$ کدام است؟

(۱) $\emptyset$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[4, 7]$ (۴) $[-1, 1]$

۲۷- تابع f چهار صفر متمایز دارد. اگر مجموع صفرهای تابع $y = -3f(5-2x)$ برابر $\frac{1}{4}$ باشد، مجموع صفرهای تابع $y = f\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$ کدام است؟

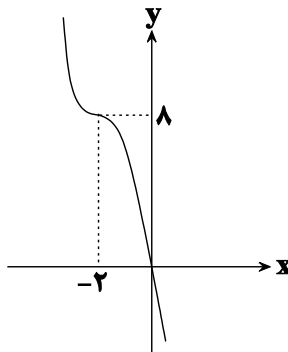
(۴) ۳۸

(۳) ۴۶

(۲) ۱۲

(۱) ۴۲

۲۸- شکل زیر، تبدیل یافته نمودار $y = x^3$ است که ضابطه آن به صورت $f(x) = (k-x)(x^2 + mx + n)$ می باشد. حاصل $\frac{k+n}{m}$ کدام



است؟

(۱) ۶

(۲) -۲

(۳) ۲

(۴) تعریف نشده

۲۹- تابع $y = x|x-4|$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) ۳

(۱) ۴

۳۰- تابع $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x-2}+1 & ; x \geq 2 \\ 5x-m & ; x < 2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ یکنوا است. m چند مقدار طبیعی نمی تواند باشد؟

(۴) ۱۳

(۳) ۱۲

(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

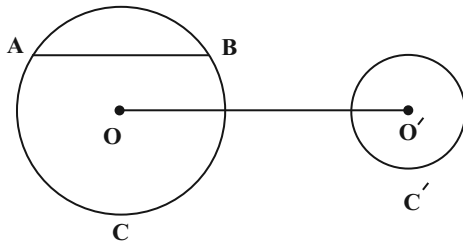
وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

هندسه ۲: دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۳۰

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اجباری است.

۳۱- در شکل زیر طول خط‌المركزين دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 3)$ ، ۲ برابر طول وتر AB بوده و امتداد وتر AB بر دایره C' مماس

است. اگر وتر AB موازی خط‌المركزين دو دایره باشد، اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

(۱) $8\sqrt{2}$

(۲) ۱۸

(۳) ۱۲

(۴) $6\sqrt{2}$

۳۲- دو دایره C و C' ، سه مماس مشترک دارند. اگر شعاع یکی از دایره‌ها ۸ برابر شعاع دایره دیگر باشد، طول مماس مشترک

خارجی دو دایره چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

(۴) ۸

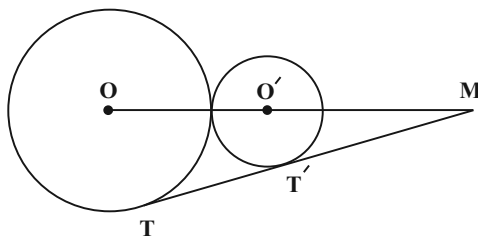
(۳) $8\sqrt{2}$

(۲) ۴

(۱) $4\sqrt{2}$

۳۳- در شکل زیر دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 4)$ مماس برون هستند. اگر M نقطه برخورد امتدادهای مماس مشترک خارجی TT' و

خط‌المركزين OO' باشد، طول پاره‌خط MO' کدام است؟

(۱) $9/8$ (۲) $10/4$

(۳) ۱۲

(۴) $13/2$

۳۴- شعاع دایره محاطی خارجی نظیر یکی از اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\sqrt{3}$ واحد است. محیط این مثلث چند واحد است؟

(۴) ۹

(۳) $4\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$

(۱) ۶

۳۵- در چهارضلعی $ABCD$ ، $\hat{A} = 75^\circ$ ، $\hat{C} = 105^\circ$ و $\hat{ABD} = 60^\circ$ است. اندازه زاویه $\hat{ACB}$ چند درجه است؟

(۴) ۷۵

(۳) ۶۰

(۲) ۴۵

(۱) ۳۰

۳۶- اگر در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره محاطی خارجی نظیر اضلاع قائمه به

ترتیب برابر $2 - \sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ باشد، شعاع دایره محاطی خارجی نظیر وتر در این مثلث کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) $2 + \sqrt{2}$ (۱) $2\sqrt{2} + 1$

۳۷- چهارضلعی محدب $ABCD$ با اضلاع $AB = 15$ ، $BC = 20$ و $AD = 7$ مفروض است. اگر عمود منصف‌های اضلاع این

چهارضلعی در نقطه‌ای واقع بر قطر AC هم‌رس باشند، مساحت این چهارضلعی کدام است؟

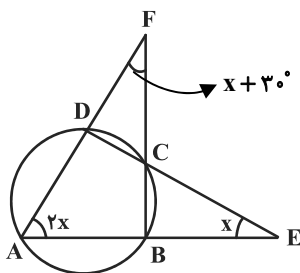
(۴) ۲۵۸

(۳) ۲۵۰

(۲) ۲۴۲

(۱) ۲۳۴

۳۸- در شکل زیر، اندازه x کدام است؟

(۱) 10° (۲) 15° (۳) 20° (۴) 25°

۳۹- اگر $\cos 9^\circ = a$ باشد، اندازه هر ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره چند برابر اندازه هر ضلع بیست‌ضلعی منتظم محیط بر

همان دایره است؟

(۴) $\frac{1}{2}a^2$ (۳) $2a^2$ (۲) $\frac{1}{2}a$ (۱) $2a$

۴۰- مساحت دایره محاطی شش‌ضلعی منتظمی به طول ضلع ۴ کدام است؟

(۴) 16π (۳) 12π (۲) 8π (۱) 4π

وقت پیشنهادی: ۱۳ دقیقه

هندسه ۱: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۲۹ تا ۴۴

پاسخ دادن به این سوالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۴۱- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۹ و ۱۵ است. اگر مجموع طول ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، ۴ برابر طول ارتفاع وارد بر ضلع سوم این مثلث باشد، اندازه ضلع سوم کدام است؟

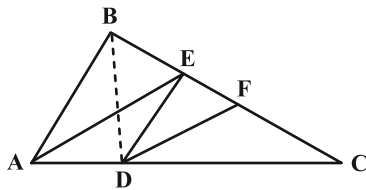
۲۴ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

۴۲- در شکل زیر، اگر $AE \parallel DF$ ، $AB \parallel DE$ و $FC = 1/5 EF$ باشد، حاصل $\frac{S_{EDF}}{S_{BDC}}$ کدام است؟



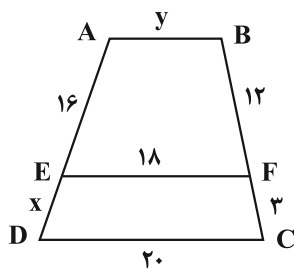
۰/۲ (۱)

۰/۲۴ (۲)

۰/۳ (۳)

۰/۳۲ (۴)

۴۳- در شکل زیر $AB \parallel EF \parallel CD$ است. مقدار $x + y$ کدام است؟



۱۴ (۱)

۱۶ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

۴۴- مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵ و ۱۷ با مثلثی به اضلاع ۶، x و y متشابه است. بیشترین مقدار مساحت ممکن برای مثلث دوم کدام است؟

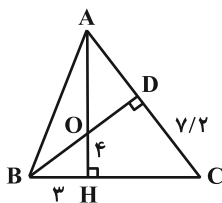
 $\frac{125}{4}$ (۴)

۳۲/۵ (۳)

 $\frac{135}{4}$ (۲)

۳۵ (۱)

۴۵- در مثلث ABC، دو ارتفاع AH و BD همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. طول پاره خط CH کدام است؟



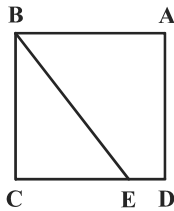
۴/۲ (۱)

۴/۸ (۲)

۵/۶ (۳)

۶ (۴)

۴۶- در شکل زیر، نقطه E روی ضلع CD (و نزدیک تر به رأس D) از مربع ABCD طوری قرار دارد که آن ضلع را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. نسبت فاصله های A و C از پاره خط BE کدام است؟



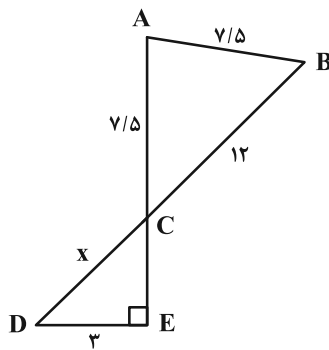
(۱) $1/25$

(۲) $1/5$

(۳) $1/75$

(۴) ۲

۴۷- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



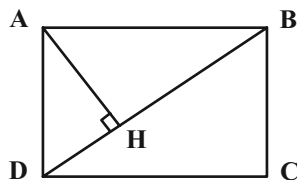
(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) $4/5$

(۴) ۴

۴۸- در مستطیل زیر با اضلاع $AB = 12$ و $BC = 4\sqrt{3}$ ، فاصله نقطه H از ضلع AB کدام است؟



(۱) $3\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) ۶

(۴) ۴

۴۹- درون یک مربع به محیط ۳۵، یک مربع به محیط ۲۵ طوری محاط شده است که رئوس مربع کوچک روی اضلاع مربع بزرگ قرار گرفته است. فاصله یک رأس مربع بزرگ از نزدیک ترین ضلع مربع کوچک چقدر است؟

(۴) $4/5$

(۳) ۴

(۲) $3/6$

(۱) ۳

۵۰- از نقطه M وسط ضلع AB از مثلث قائم الزاویه ABC، عمود MH را بر وتر BC رسم می کنیم. اگر $CH = \sqrt{6}$ و $BH = 2$ باشد، اندازه ضلع AC کدام است؟

(۴) $1/5\sqrt{2}$

(۳) ۲

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) ۱

وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

هندسه ۳: ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۹ تا ۲۱

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۵۱- اگر برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه A و B داشته باشیم $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A + 2B = -2I$ ، مجموع درایه‌های ماتریس

A کدام است؟

۸ (۱)

۶ (۲)

۴ (۳)

۲ (۴)

۵۲- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2b & 3 & 2c \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ و $A \times B$ یک ماتریس قطری باشد، حاصل $a + b + c$ برابر کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

صفر (۴)

۵۳- اگر $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر و غیر صفر باشد، مقدار x کدام است؟

۱ (۱)

-۱ (۲)

۲ (۳)

-۲ (۴)

۵۴- اگر ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & ; i = j \\ i + 2j & ; i > j \\ i - j + 1 & ; i < j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & ; i = j \\ i + 2j & ; i > j \\ i - j + 1 & ; i < j \end{cases}$ تعریف شده

باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس AB کدام است؟

۴ (۱)

۸ (۲)

۱۲ (۳)

۱۸ (۴)

مشابه سؤال‌هایی که با آیکون  مشخص شده‌اند در امتحانات تشریحی وجود دارد.

۵۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ و $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

(۲) ۸

(۱) ۱۲

(۴) صفر

(۳) ۴

۵۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & 0 & z & 1 \\ x & 0 & y & 0 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه مجموع درایه‌های ستون چهارم ماتریس ABC

کدام است؟

(۲) ۴۰

(۱) ۳۰

(۴) ۶۰

(۳) ۵۰

۵۷- اگر $I = \begin{bmatrix} 3^{x-y} & 0 \\ x+y-z & 2^{x-1} \end{bmatrix}$ ماتریس همانی باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۲) ۶

(۱) ۷

(۴) ۴

(۳) ۵

۵۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^{12} کدام است؟

(۲) ۲^{۱۱}

(۱) صفر

(۴) ۲^{۱۳}(۳) ۲^{۱۲}

۵۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه با فرض $A^3 - A^2 = mA + nI$ ، حاصل $m + n$ کدام است؟

(۲) ۱۳

(۱) ۱۶

(۴) ۱۰

(۳) ۱۲

۶۰- برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه A و B داریم $AB = B^T A$ و $A^3 = B^3 = I$. کدام تساوی لزوماً درست نیست؟

(۲) $(AB)^T = A^T$ (۱) $(AB^T)^T = A^T B$ (۴) $(A^T B)^T = AB^T$ (۳) $(BA)^T = A^T$



وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

آمار و احتمال: آشنایی با مبانی ریاضیات + احتمال: صفحه‌های ۲۱ تا ۴۷

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اجباری است.

۶۱- متمم مجموعه $A \cup (A' \cap B')$ دارای ۵۱۲ زیرمجموعه و مجموعه $A \cap B$ دارای ۱۵ زیرمجموعه ناتهی است. مجموعه B چند زیرمجموعه دوعضوی دارد؟

(۱) ۴۵ (۲) ۵۵

(۳) ۶۶ (۴) ۷۸

۶۲- اگر A, B و C سه مجموعه غیرتهی و $(A \cap B)' \cap (A \cup B') \cap C = C$ باشد، آنگاه کدام یک از مجموعه‌های زیر الزاماً تهی است؟

(۱) $B \cap C$ (۲) $B - C$

(۳) $C - B$ (۴) $B' \cap C'$

۶۳- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، ساده شده عبارت $[(A \cup B) - B] \cap [(A \cap B) \cup B']$ همواره برابر کدام است؟

(۱) $A - B$ (۲) $B - A$

(۳) A' (۴) B'

۶۴- اگر برای دو مجموعه $A = \{a^2 - 1, 3, b\}$ و $B = \{c, 8\}$ رابطه $A \times B = B \times A$ برقرار باشد، حاصل $a + b + c$ چند مقدار متمایز صحیح می‌تواند اختیار کند؟

(۱) ۳ (۲) ۴

(۳) ۵ (۴) ۶

۶۵- مجموعه مرجع $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ را در نظر بگیرید. اگر A و B مجموعه‌هایی باشند که اعضای آن‌ها به ترتیب بر ۶ و ۸

بخش‌پذیر باشند، تعداد اعضای مجموعه $A \times B - B \times A$ چند عضو دارد؟

(۱) ۱۹۲ (۲) ۱۷۶

(۳) ۱۶۰ (۴) ۱۴۴

۶۶- در پرتاب دو تاس سالم، چقدر احتمال دارد حاصل ضرب اعداد رو شده عددی اول باشد؟

$$(1) \frac{1}{6} \quad (2) \frac{2}{9}$$

$$(3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{1}{9}$$

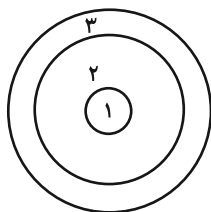
۶۷- ۳ نفر می‌خواهند در سالن‌های با شماره ۱، ۲ و ۳ قرار بگیرند. چقدر احتمال دارد حداقل یک نفر در سالن ۳ قرار بگیرد؟

$$(1) \frac{7}{9} \quad (2) \frac{2}{3}$$

$$(3) \frac{19}{27} \quad (4) \frac{20}{27}$$

۶۸- در پرتاب یک دارت به هدفی مطابق شکل زیر، اگر احتمال اصابت دارت به ناحیه k ام از رابطه $P(k) = \frac{\binom{4}{k}}{ak!}$ به دست آید،

احتمال اصابت دارت به ناحیه دوم چقدر بیشتر از ناحیه سوم است؟ (دارت حتماً به هدف برخورد می‌کند).



$$(1) \frac{13}{23}$$

$$(2) \frac{11}{23}$$

$$(3) \frac{7}{23}$$

$$(4) \frac{5}{23}$$

۶۹- در یک تجربه تصادفی، $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه است. اگر $P(a)$ ، $P(b)$ و $P(c)$ به ترتیب از راست به چپ، یک دنباله هندسی

با قدر نسبت ۲ تشکیل دهند، احتمال وقوع پیشامد $\{a, b\}$ چقدر از احتمال وقوع پیشامد $\{b, c\}$ کمتر است؟

$$(1) \frac{4}{7} \quad (2) \frac{3}{7}$$

$$(3) \frac{2}{7} \quad (4) \frac{1}{7}$$

۷۰- فرض کنید احتمال ابتلای فردی به گرمزدگی و آفتاب‌سوختگی در تابستان یک سال به ترتیب $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ و احتمال اینکه این فرد به هیچ

کدام از این دو مورد مبتلا نشود $\frac{1}{2}$ باشد. احتمال اینکه این فرد فقط گرمزده شود، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{5}{45}$$

$$(3) \frac{1}{5} \quad (4) \frac{5}{55}$$

وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

ریاضیات گسسته: آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱ تا ۱۷

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

- ۷۱- فرض کنید a و b اعدادی صحیح باشند. کدام یک از موارد زیر با مثال نقض رد می‌شود؟
 (۱) اگر a و b دو عدد فرد باشند، آنگاه $a - b$ زوج است.
 (۲) اگر $a + b$ فرد باشد، آنگاه ab زوج است.
 (۳) اگر ab زوج باشد، آنگاه $a + b$ زوج است.
 (۴) اگر a^2 فرد باشد، آنگاه a نیز فرد است.
- ۷۲- کدام یک از احکام زیر فاقد مثال نقض است؟
 (۱) حاصل ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، عددی گنگ است.
 (۲) به ازاء هر عدد طبیعی مانند n ، حداقل یکی از اعداد $2^n - 1$ یا $2^n + 1$ اول است.
 (۳) عدد $2^{2^n} + 1$ به ازاء همه اعداد طبیعی n ، عددی اول است.
 (۴) هیچ دو عدد طبیعی مانند a و b در رابطه $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ صدق نمی‌کنند.
- ۷۳- اگر k عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ و $4k + 1$ عددی مربع کامل باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد k درست است؟
 (۱) k همواره به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی است.
 (۲) k می‌تواند عددی مربع کامل باشد.
 (۳) k می‌تواند عددی اول باشد.
 (۴) k همواره عددی مضرب ۳ است.
- ۷۴- اگر α و β دو عدد گنگ و عدد $\alpha - \beta$ عددی گویا باشد، آنگاه عدد $3\beta - 3\alpha$ عددی و عدد $3\beta + 2\alpha$ عددی است.
 (۱) گنگ- گنگ (۲) گویا- گویا (۳) گویا- گنگ (۴) گنگ- گویا
- ۷۵- اگر مجذور تعداد زیر مجموعه‌های دو عضو یک مجموعه n عضوی، عددی زوج باشد، n چند مقدار دو رقمی می‌تواند اختیار کند؟
 (۱) ۴۰ (۲) ۴۴ (۳) ۴۵ (۴) ۵۰
- ۷۶- فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند. در اثبات نامساوی $x^2 + y^2 \geq x + y - \frac{1}{4}$ به روش بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟
 (۱) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ (۲) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2 + y^2) \geq 0$
 (۳) $(x+y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ (۴) $(x-y+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$
- ۷۷- چند زوج مرتب (a, b) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد به گونه‌ای که رابطه $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار باشد؟ ($a+b \neq 0$)
 (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار
- ۷۸- در یک تقسیم، مقسوم ۷ برابر باقی‌مانده بوده و خارج قسمت حداکثر مقدار ممکن می‌باشد. تفاضل حداکثر و حداقل مقدار دو رقمی ممکن برای مقسوم کدام است؟
 (۱) ۱۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۵ (۴) ۷۰
- ۷۹- برای اعداد صحیح a و b ، اگر b عددی فرد باشد به طوری که $a | b$ ، آنگاه حاصل $(9ab, 12a^2)$ کدام است؟
 (۱) $3a^2$ (۲) $3|ab|$ (۳) $9|ab|$ (۴) $9a^2$
- ۸۰- اعداد $9k + 7$ و $7k + 6$ بر عدد a بخش‌پذیر هستند. اختلاف مقادیر طبیعی ممکن برای a کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

مشابه سؤالی که با آیکون  مشخص شده‌اند در امتحانات تشریحی وجود دارد.



آزمون تابستان «۱۶ مرداد ۱۴۰۵» دفترچه دوم اختصاصی دوازدهم ریاضی (فیزیک و شیمی)

دفترچه سوال

مدت زمان کل پاسخ گویی سوالات: ۷۰ دقیقه

تعداد کل سوالات: ۶۰ سؤال

(۲۰ سوال اجباری + ۴۰ سوال اختیاری)

نام درس	تعداد سؤال	شماره سؤال	زمان پاسخگویی
اجباری	۲	۱۰	۱۵'
اختیاری	۱	۱۰	۱۰'
اختیاری	۳	۱۰	۱۵'
اجباری	۲	۱۰	۱۰'
اختیاری	۱	۱۰	۱۰'
اختیاری	۳	۱۰	۱۰'
جمع کل	۶۰	۸۱-۹۰	۷۰'

پدیدآورندگان

نام درس	نام طراحان
فیزیک	پویا شمشیری-خسرو ارغوانی فرد-بابک اسلامی-محمد اکبری-حسین الهی-عبدالرضا امینی نسب-زهره آقامحمدی محمدعلی راست پیمان-بهنام رستمی-مسعود قره خانی-محسن قندچلر-مصطفی کیانی-آراس محمدی-حسین مخدومی مرتضی مرتضوی-سیده ملیحه میر صالحی-سیدعلی میرنوری-حسام نادری-مصطفی واثقی
شیمی	هدی بهاری پور-محمد رضا پور جاوید-علی جدی-امیر حاتمیان-ارژنگ خانلری-حمید ذبحی-حسن رحمتی-کوکنده پویا رستگاری-فرزاد رضایی-علی رفیعی-سهراب صادقی زاده-محمد حسین صادقی مقدم-آترین صبا-علی طرفی امیرحسین طیبی-محمد فائز نیا-میثم کوثری لشگری-علیرضا کیانی دوست-علی مجیدی-مجتبی محبوب-حسین ناصری ثانی میثم نوری

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	فیزیک	شیمی
گزینشگر	حسین الهی	مجتبی محبوب
گروه ویراستاری	سینا صالحی حسین بصیرتر کمپور زهره آقامحمدی	احسان پنجه شاهی آترین صبا امیرحسین توحیدی
مسئول درس	حسین الهی	مجتبی محبوب
مستند سازی	ابراهیم نوری	علیرضا نجفی
ویراستاران (مستندسازی)	سجاد بهارلویی	فاطمه الهی محسن دستجردی رزیتا حبیب اله

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: علیرضا همایون خواه
حروف نگار	فرزانه فتح اله زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلمچی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳



وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

فیزیک ۲: الکتریسته ساکن + جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۳۲ تا ۶۱

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اجباری است.

۸۱- اگر فاصله بین صفحات یک خازن تخت را که به یک باتری متصل است دو برابر کنیم، چند مورد از کمیت‌های زیر نصف می‌شوند؟

- (الف) ظرفیت خازن
(ب) بار ذخیره شده در خازن
(پ) انرژی ذخیره شده در خازن
(ت) بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن
- (۱) صفر (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۸۲- ظرفیت خازنی $1\mu F$ و بار الکتریکی ذخیره شده در آن Q است. اگر به اندازه ۲۵ درصد از بار ذخیره شده در خازن، بار الکتریکی منفی از صفحه مثبت جدا کرده و به صفحه منفی منتقل کنیم، انرژی ذخیره شده در آن ۴۵ ژول افزایش می‌یابد. Q چند میلی‌کولن بوده است؟

- (۱) 0.04 (۲) 40 (۳) 80 (۴) 0.08

۸۳- مساحت هر یک از صفحات یک خازن تخت 20 cm^2 و ظرفیت آن 18 nF است. فضای بین دو صفحه خازن از عایقی با ثابت دی‌الکتریک 10 پر شده است. اگر بزرگی میدان الکتریکی بین دو صفحه از $\frac{N}{C} \times 10^7$ بیشتر شود، پدیده فروریزش رخ

می‌دهد. بیشترین باری که در این خازن می‌تواند ذخیره شود، چند میکروکولن است؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2})$

- (۱) 18 (۲) 12 (۳) 9 (۴) 6

۸۴- جریان الکتریکی متوسط عبوری از یک رسانا 50 mA است. تعداد الکترون‌های عبوری هر سطح مقطع از این رسانا در مدت ۲ دقیقه کدام است؟ $(e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$

- (۱) $7/5 \times 10^{19}$ (۲) $7/5 \times 10^{18}$ (۳) $3/75 \times 10^{18}$ (۴) $37/5 \times 10^{18}$

۸۵- مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا 18Ω است. اگر $\frac{1}{4}$ از طول این سیم را بریده و آن را از یک دستگاه عبور دهیم و طول آن را به طور یکنواخت به طول اولیه سیم برسانیم، مقاومت الکتریکی سیم در حالت جدید چند اهم می‌شود؟ (دما ثابت است.)

- (۱) 9 (۲) 18 (۳) 27 (۴) 36

۸۶- جرم یک کابل 5 کیلوگرم است و هنگامی که به ولتاژ 90 ولت متصل می‌شود، جریان 75 آمپر از آن عبور می‌کند. اگر چگالی ماده

سازنده این کابل $2 \frac{g}{cm^3}$ و مقاومت ویژه آن $3 \times 10^{-7} \Omega.m$ باشد، طول کابل چند متر است؟

- (۱) 25 (۲) 30 (۳) 60 (۴) 100

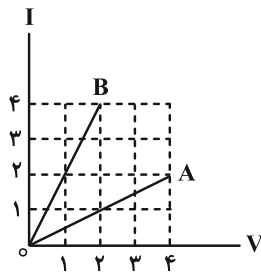
۸۷- کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

- (۱) در برخی مواد، مانند جیوه و قلع با کاهش دما، مقاومت ویژه در دمای خاصی به صورت ناگهانی به صفر افت می‌کند.
 (۲) رئوستا نوعی مقاومت پیچهای است که از سیمی با مقاومت ویژه نسبتاً زیاد ساخته شده است.

(۳) نماد ترمیستور در مدارهای الکتریکی  می‌باشد.

(۴) مقاومت نوری (LDR) نوعی از مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده شده به آن بستگی دارد و با افزایش شدت نور مقاومت آن افزایش می‌یابد.

۸۸- شکل زیر، نمودار $I - V$ برای دو رسانای A و B را نشان می‌دهد. اگر این دو رسانا به پتانسیل یکسان متصل شوند، تعداد الکترون‌های عبوری از یک سطح مقطع رسانای A در مدت t ، چند برابر تعداد الکترون‌های عبوری از یک سطح مقطع رسانای B در مدت $3t$ است؟



(۱) $\frac{1}{12}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{4}{3}$

۸۹- المنت یک اجاق برقی شامل سیمی به طول $1/2\text{m}$ و سطح مقطع $2/3\text{mm}^2$ است که داخل ماده عایقی قرار گرفته است و با عبور جریان الکتریکی المنت داغ می‌شود. مقاومت ویژه ماده سازنده سیم در دمای 320°C برابر با $6/9 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$ و در دمای 420°C برابر با $10/35 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$ می‌باشد. مقاومت سیم در دمای 420°C نسبت به دمای 320°C چند درصد افزایش یافته است؟ (از انبساط در اثر تغییر دما صرف نظر شود).

(۴) ۷۵

(۳) ۶۶/۶

(۲) ۵۰

(۱) ۳۳/۳

۹۰- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (۱) در یک سیم فلزی که اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر صفر است، الکترون‌های آزاد با تندی‌هایی از مرتبه $10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در حال حرکت‌اند.
 (۲) سرعت سوق الکترون‌های آزاد در یک رسانا می‌تواند به کندی سرعت حرکت یک حلزون باشد.
 (۳) اندازه سرعت سوق در یک رسانای فلزی مثلاً در سیم‌های مسی از مرتبه بزرگی 10^{10} است.
 (۴) جهت قراردادی جریان الکتریکی I ، در جهت سوق الکترون‌ها است.

وقت پیشنهادی: ۱۰ دقیقه

فیزیک ۱: ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۲۳ تا ۵۲

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۹۱- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- (۱) قطره‌های شبنمی که روی شاخ و برگ درختان در نور خورشید صبحگاهی می‌درخشند، نشانه‌ای از نیروی جاذبه بین مولکول‌های آب هستند.
 (۲) فاصله ذرات سازنده مایع و جامد تقریباً یکسان و در حدود یک آنگستروم است.
 (۳) مولکول‌های مایع نظم و تقارن جامدهای بلورین را ندارند.
 (۴) ذره‌های سازنده مواد تنها نیروی جاذبه به یکدیگر وارد می‌کنند.

۹۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- (الف) اگر مقداری آب را روی سطح افقی شیشه‌ای تمیز بریزیم، آب سطح شیشه را تر نمی‌کند.
 (ب) کشش سطحی در مایع‌ها، نوعی نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های سطح مایع است.
 (پ) هم‌چسبی، نیرویی است که مولکول‌های یک ماده را به سوی مولکول‌های همان ماده می‌کشد.
 (ت) وقتی لوله موئین را وارد یک ظرف جیوه کنیم، سطح جیوه درون لوله از سطح جیوه درون ظرف بالاتر قرار می‌گیرد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

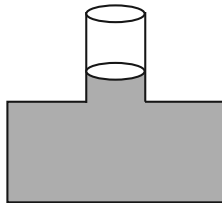
۹۳- فشار کل در عمق ۵۰ سانتی‌متری از سطح مایعی ساکن به چگالی $1 \frac{g}{cm^3}$ ، برابر با P است. چند سانتی‌متر دیگر در مایع پایین

برویم تا فشار کل ۱۰ درصد افزایش یابد؟ ($P_0 = 95 kPa$, $g = 10 \frac{N}{kg}$)

(۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰

۹۴- در شکل زیر، سطح مقطع دهانه ظرف $\frac{1}{4}$ برابر سطح مقطع کف ظرف است. اگر ۳۰۰ گرم از مایع درون ظرف را به آن اضافه کنیم،

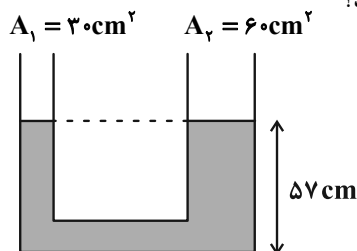
بعد از ایجاد تعادل، اندازه نیروی وارد بر کف ظرف چند نیوتون افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)



(۱) ۴۸
 (۲) ۱۲
 (۳) ۳
 (۴) ۶

۹۵- در شکل زیر، چگالی مایع در حال تعادل $2 \frac{g}{cm^3}$ است. چند گرم مایع به چگالی $1 \frac{g}{cm^3}$ در شاخه سمت چپ بریزیم تا پس از

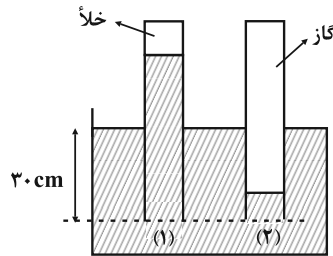
ایجاد تعادل، ارتفاع سطح آزاد مایع از کف ظرف در شاخه سمت راست برابر ۶۰ cm شود؟



(۱) ۳۰۰
 (۲) ۵۴۰
 (۳) ۱۸۰
 (۴) ۹۰۰

۹۶- مطابق شکل زیر، دو لوله آزمایش یکسان، به طور قائم تا عمق ۳۰ سانتی متری درون جیوه به چگالی $\frac{g}{cm^3}$ فرو برده

شده‌اند. اگر ارتفاع جیوه در لوله‌های (۱) و (۲) به ترتیب ۸۰cm و ۵cm باشد، فشار گاز درون لوله (۲) چند کیلوپاسکال است؟



$$(g = 10 \frac{m}{s^2})$$

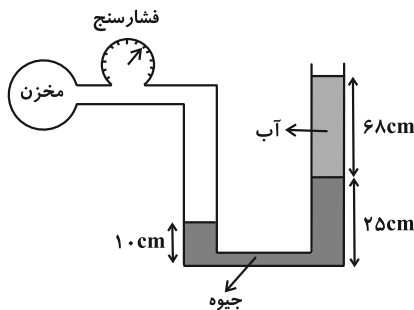
(۱) ۸۵

(۲) ۱۰۲

(۳) ۱۳۰

(۴) ۶۸

۹۷- در شکل زیر، اگر عددی که فشارسنج نشان می‌دهد $\frac{1}{5}$ برابر فشار مطلق مخزن باشد، فشار هوا چند سانتی متر جیوه است؟



$$(p_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{g}{cm^3} \text{ و } p_{\text{آب}} = 1 \frac{g}{cm^3})$$

(۱) ۱۰۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۸۰

(۴) ۷۵

۹۸- کدام گزینه جلوه‌هایی از کشش سطحی نمی‌باشد؟

(۲) قطره‌ای شدن جیوه روی سطح شیشه

(۱) قرار گرفتن گیره فلزی روی سطح آب

(۴) نشستن حشره روی سطح آب

(۳) قطره‌های کروی آب در حال سقوط آزاد

۹۹- در یک ظرف آب، کره توپر B روی سطح مایع شناور و کره توپر A داخل مایع غوطه‌ور می‌باشد. اگر بزرگی نیروی شناوری وارد

بر کره B بیشتر از بزرگی نیروی شناوری وارد بر کره A باشد، نسبت شعاع دو کره $(\frac{r_B}{r_A})$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۴) اطلاعات مسئله کافی نیست

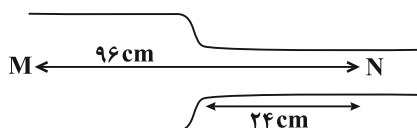
(۳) ۳

(۲) ۱

(۱) ۰/۵

۱۰۰- در لوله افقی زیر، جریان آب با تندی $8 \frac{cm}{s}$ و به ترتیب در قسمت باریک با قطر ۴cm و قسمت پهن‌تر با شعاع r' در جریان

است. اگر یک ذره فاصله MN را در مدت ۳۹s بپیماید، r' چند سانتی متر است؟ (جریان را در هر قسمت لایه‌ای فرض کنید.)



(۱) ۲

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۴

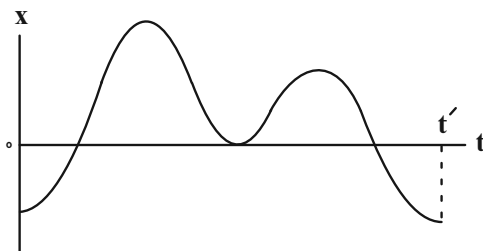
وقت پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

فیزیک ۳: حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱ تا ۲۱

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۱۰۱- نمودار مکان - زمان متحرکی که در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = t'$,

به ترتیب از راست به چپ، جهت حرکت و جهت شتاب متحرک چند بار تغییر کرده است؟



(۱) ۴ و ۴

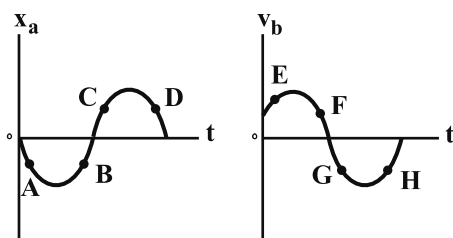
(۲) ۳ و ۳

(۳) ۴ و ۳

(۴) ۳ و ۴

۱۰۲- در شکل‌های زیر، نمودار مکان - زمان متحرک a و نمودار سرعت - زمان متحرک b رسم شده است. در کدام گزینه، تمام نقاط

بیان شده از لحاظ تندشونده و یا کندشونده بودن نوع حرکت، مشابه یکدیگر هستند؟



(۱) G, F, C, A

(۲) G, E, D, A

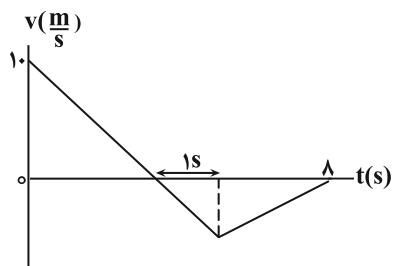
(۳) H, F, C, B

(۴) G, E, D, B

۱۰۳- شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. اگر اندازه شتاب در بازه‌ای که بردار

شتاب در خلاف جهت محور است، ۲ برابر اندازه شتاب در بازه‌ای باشد که بردار شتاب در جهت محور است، مسافت طی شده

توسط متحرک در ۸ ثانیه نخست حرکت چند متر است؟



(۱) ۲۰

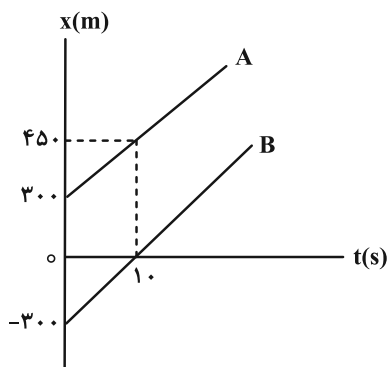
(۲) ۲۲

(۳) ۲۸

(۴) ۴۰

مشابه سؤال‌هایی که با آیکون  مشخص شده‌اند در امتحانات تشریحی وجود دارد.

۱۰۴- نمودار مکان- زمان دو خودرو که روی خط راست حرکت می کنند، مطابق شکل زیر است. در چه لحظه یا لحظاتی بر حسب ثانیه،



فاصله دو متحرک از هم ۱۵۰ m می شود؟

(۱) ۵۰ ، ۳۰

(۲) ۷۵ ، ۴۵

(۳) ۳۰

(۴) ۴۵

۱۰۵- متحرکی فاصله مستقیم بین دو نقطه را بدون تغییر جهت طی می کند. اگر این متحرک $\frac{4}{5}$ اولیه کل مسیر را با سرعت متوسط v و

بقیه مسیر را با سرعت متوسط $\frac{1}{4}v$ بپیماید، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند برابر v است؟

(۴) $\frac{5}{3}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{5}{8}$

(۱) $\frac{8}{5}$

۱۰۶- محیط بان یک پارک حفاظت شده هنگام گشت شبانه، با تندی $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در جاده ای مستقیم در حرکت است که ناگهان گوزن بدون

حرکتی را در جلوی خود می بیند و ترمز می گیرد (شکل زیر). حرکت خودرو با شتابی به اندازه $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ کند می شود تا سرانجام

متوقف شود. اگر لحظه ای که محیط بان ترمز می گیرد، گوزن در فاصله ۷۰ متری از خودرو باشد، خودرو در چه فاصله ای از گوزن

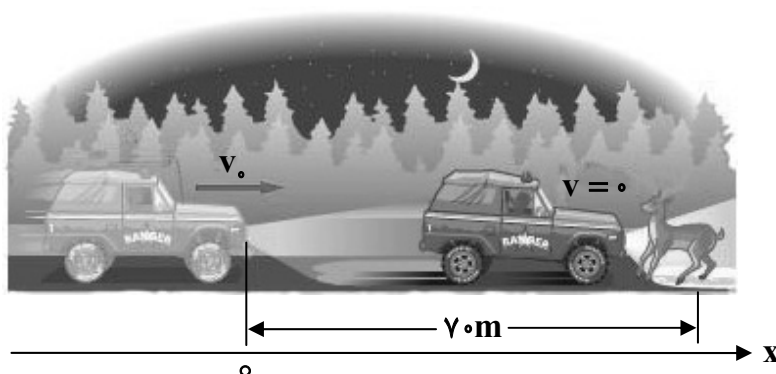
متوقف می شود؟

(۱) ۴۰ متر

(۲) ۳۰ متر

(۳) ۱۰ متر

(۴) خودرو به گوزن برخورد می کند



۱۰۷- چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟ 

الف) تندی متوسط یک کمیت نرده‌ای است.

ب) برداری که مبدأ محور را به مکان جسم وصل می‌کند، بردار مکان است.

پ) بردار شتاب متوسط همواره هم‌جهت با بردار سرعت می‌باشد.

ت) معادله مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت، تابعی درجه دوم از زمان است.

ث) شیب خطی که نمودار سرعت- زمان یک متحرک را در دو لحظه به هم وصل می‌کند، برابر با شتاب لحظه‌ای است.

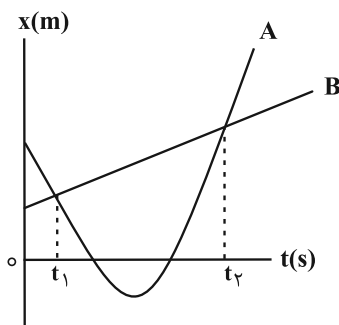
ج) عقربه تندی‌سنج خودروها، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهند.

(۱) یک مورد (۲) دو مورد (۳) سه مورد (۴) چهار مورد

۱۰۸- نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B که در مسیری مستقیم به ترتیب با شتاب ثابت و سرعت ثابت حرکت می‌کنند، مطابق شکل

زیر است. اگر سرعت متحرک A در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب $5 \frac{m}{s}$ و $7 \frac{m}{s}$ باشد، سرعت متوسط متحرک B در همین بازه

زمانی چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۶

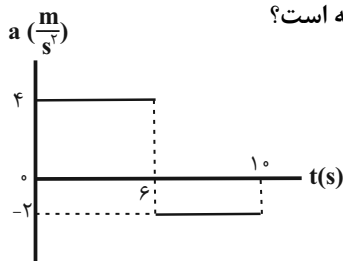
(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۱۰۹- نمودار شتاب- زمان متحرکی که در مبدأ زمان با تندی $16 \frac{m}{s}$ در جهت منفی از مبدأ مکان روی محور x عبور می‌کند، مطابق

شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در 10 ثانیه ابتدایی حرکت چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۰/۸

(۲) ۱/۶

(۳) ۲/۴

(۴) ۴

۱۱۰- معادله حرکت دو متحرک که هم‌زمان روی محور x حرکت می‌کنند، در SI به صورت $x_1 = t^2 - 2t + 1$ و $x_2 = -t^2 - 4t$ است.

این دو متحرک چند بار از کنار هم عبور می‌کنند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

وقت پیشنهادی: ۱۰ دقیقه

شیمی ۲: قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۵ تا ۵۰

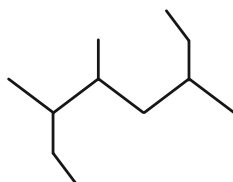
پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اجباری است.

۱۱۱- کدام گزینه از عبارت‌های زیر نادرست است؟

- (۱) آهنک بازگشت فلزها به طبیعت، بسیار بیشتر از آهنک مصرف و استخراج آنها است.
- (۲) در هر سال به ازای هر انسان، ۴۰ کیلوگرم فولاد به‌صورت پسماند در می‌آید.
- (۳) در استخراج آهن، تقریباً دو برابر جرم آن، سنگ معدن آهن استفاده می‌شود.
- (۴) انرژی ذخیره شده از بازگردانی ۷ قوطی فولادی می‌تواند یک لامپ ۶۰ وات را ۲۵ ساعت روشن نگه دارد.

۱۱۲- کدام یک از عبارت‌های زیر در مورد نفت خام درست است؟

- (۱) بخش عمده آن را کربوهیدرات‌ها تشکیل می‌دهند.
- (۲) مایعی رقیق است که به رنگ سیاه یا قهوه‌ای متمایل به سبز وجود دارد.
- (۳) کمتر از نیمی از آن برای تأمین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز ما به کار می‌رود.
- (۴) حدود نیمی از نفت خام مصرفی در دنیا برای تولید الیاف، شوینده‌ها، رنگ، پلاستیک و ... به کار گرفته می‌شود.

۱۱۳- نام ترکیب روبه‌رو به روش آیوپاک کدام است و نیم مول از این ترکیب با چند لیتر گاز اکسیژن با چگالی 1.43 g.L^{-1} به‌طور کاملمی‌سوزد؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۱) ۲، ۲- دی‌اتیل - ۳- متیل هگزان - ۳۴۰

(۲) ۲، ۲- دی‌اتیل - ۳- متیل هگزان - ۱۷۰

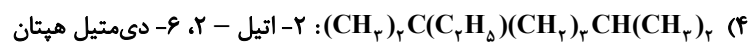
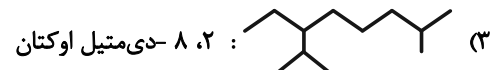
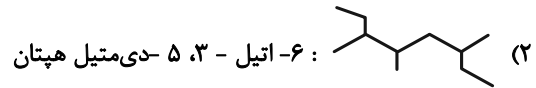
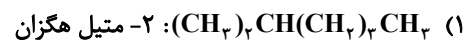
(۳) ۳، ۴، ۶- تری‌متیل اوکتان - ۳۴۰

(۴) ۳، ۴، ۶- تری‌متیل اوکتان - ۱۷۰

۱۱۴- کدام گزینه در مورد آلکان‌ها نادرست است؟

- (۱) آلکان‌ها، هیدروکربن‌های سیرشده هستند.
- (۲) گرانشی آلکان‌های مایع با افزایش جرم مولی کمتر می‌شود.
- (۳) نقطه ذوب و جوش آن‌ها با افزایش جرم مولی زیاد می‌شود.
- (۴) در اثر سوختن کامل در دمای اتاق، تولید انرژی، آب و کربن دی‌اکسید می‌کنند.

۱۱۵- نام کدام یک از ترکیبات زیر درست است؟



۱۱۶- کدام گزینه عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌نماید؟

«..... در مقایسه با ، دارد.»

(۱) اتیل‌پنتان - پروپان - نقطه جوش کمتری

(۲) هگزان - وازلین - تمایل به جاری شدن کمتری

(۳) هگزان - آب - توانایی بهتری برای نگهداری فلزهای فعال

(۴) هپتان - اتیل‌پنتان - پیوندهای کربن - کربن بیشتری

۱۱۷- در یک ظرف مخلوطی به حجم ۲۶۸/۸ لیتر از گازهای اتن و اتان را در شرایط STP داریم. اگر این مخلوط با ۸ گرم گاز

هیدروژن به طور کامل واکنش دهد، درصد مولی اتان در مخلوط اولیه کدام است؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

(۴) ۸۳/۳

(۳) ۶۶/۶

(۲) ۳۳/۳

(۱) ۱۶/۶

۱۱۸- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) می‌توان گفت اتین از اتان واکنش‌پذیرتر است.

(۲) از گاز اتین در جوشکاری و برش فلزات استفاده می‌شود.

(۳) از گاز اتن به عنوان عمل آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود.

(۴) گاز اتن به عنوان دومین عضو خانواده آلکن‌ها دارای چهار اتم هیدروژن است.

۱۱۹- از سوختن کامل ۵/۰ مول از یک آلکین، ۲۷ گرم بخار آب حاصل شده است. درصد جرمی هیدروژن در این هیدروکربن به تقریب

کدام است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

(۴) ۱۱

(۳) ۸۹

(۲) ۳۰

(۱) ۷۰

۱۲۰- کدام عبارت زیر نادرست است؟

(۱) در برج تقطیر از بالا به پایین دما افزایش می‌یابد.

(۲) بنزین نسبت به نفت سفید در قسمت‌های بالاتر برج تقطیر به دست می‌آید.

(۳) گرانیوی نفت کوره به دلیل بزرگ‌تر بودن مولکول‌های آن از بنزین بیشتر است.

(۴) نفت سنگین کشورهای عربی در دمای اتاق، بیشتر از نفت برنت دریای شمال تمایل به جاری شدن دارد.



وقت پیشنهادی: ۱۰ دقیقه

شیمی ۱: کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۴ تا ۴۶

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۱۲۱- کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) طبق مدل اتمی بور، الکترون‌ها در فضایی بسیار بزرگ‌تر و در لایه‌های پیرامون هسته توزیع می‌شوند.
- (۲) در مدل کوانتومی، لایه‌ها از هسته به سمت بیرون شماره‌گذاری می‌شوند و شماره هر لایه را با n نمایش می‌دهند.
- (۳) در گستره امواج الکترومغناطیس به‌دست آمده برای اتم هیدروژن، تنها چهار خط با طول موج معین تأیید شده است.
- (۴) طبق نظر نیلز بور، صرفاً با بررسی تعداد نوار رنگی در طیف نشری خطی، می‌توان اطلاعات ارزشمندی از اتم هیدروژن به‌دست آورد.

۱۲۲- همه عبارت‌های زیر درست هستند؛ به جز:

- (۱) اختلاف سطح انرژی لایه‌های دورتر از هسته بیشتر از اختلاف سطح انرژی لایه‌های نزدیک‌تر به هسته است.
- (۲) در مدل کوانتومی اتم، الکترون‌های هر لایه در حالت پایه دارای آرایش و انرژی معینی بوده و اتم دارای پایداری نسبی است.
- (۳) تفاوت انرژی بین لایه‌های اتم عنصری با اتم عنصرهای دیگر متفاوت بوده و هر عنصر طیف نشری خطی منحصر به فردی دارد.
- (۴) الکترون برانگیخته هرچه انرژی بیشتری را جذب کرده باشد، در هنگام بازگشت به حالت اولیه خود، نور با طول موج کمتری را نشر خواهد کرد.

۱۲۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر، نادرست هستند؟

- (الف) اختلاف شمار عنصرهای دسته s با عنصرهای دوره سوم جدول دوره‌ای، برابر با ۵ است.
- (ب) در عنصرهای دوره سوم جدول دوره‌ای، زیرلایه‌های $3s$ ، $3p$ و $3d$ از الکترون پر می‌شوند.
- (پ) در آخرین زیرلایه آرایش الکترونی اتم چهار عنصر از دوره چهارم جدول دوره‌ای، یک الکترون یافت می‌شود.
- (ت) انرژی زیرلایه $4f$ از زیرلایه $5d$ کمتر و از زیرلایه $6s$ بیشتر است و نخستین بار در دوره ششم به وسیله الکترون اشغال می‌شود.
- (۱) الف و ب (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) الف و ت

۱۲۴- کدام موارد از مطالب زیر درست می‌باشند؟

- (آ) مقایسه انرژی زیرلایه‌های $5f < 6d < 7p$ درست است.
- (ب) مجموعه‌ای از زیرلایه‌ها با l برابر، یک لایه الکترونی را تشکیل می‌دهند.
- (پ) پنجمین زیرلایه الکترونی، ظرفیت پذیرش حداکثر ۱۸ الکترون را دارد.
- (ت) لایه چهارم عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی، حداکثر ۸ الکترون دریافت می‌کنند.
- (۱) آ و ب (۲) پ و ت (۳) ب و پ (۴) آ و ت

۱۲۵- آرایش الکترونی چه تعداد از عنصرهای موجود در دوره‌های اول تا چهارم جدول تناوبی به زیرلایه s ختم می‌شود و در چه تعداد

از عنصرهای تناوب چهارم جدول تناوبی، تنها یک زیرلایه نیمه‌پر وجود دارد؟ (گزینه‌ها را به ترتیب از راست به چپ بخوانید.)

- (۱) ۴، ۱۸ (۲) ۵، ۱۸ (۳) ۴، ۲۰ (۴) ۵، ۲۰

۱۲۶- کدام گزینه دربارهٔ عنصر D ۲۹ صحیح است؟ (نماد عناصر فرضی است.)

(۱) آرایش الکترونی آن از قاعدهٔ آفبا پیروی می‌کند.

(۲) جزو فلزات واسطه است و آرایش الکترونی آن به زیرلایهٔ $3d$ ختم می‌شود.

(۳) این عنصر در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد و نهمین فلز دورهٔ خود محسوب می‌شود.

(۴) اختلاف عدد اتمی آن با گاز نجیب هم‌دورهٔ خود کمتر از اختلاف عدد اتمی آن با گاز نجیب دورهٔ قبل از خود است.

۱۲۷- اگر شمار کل الکترون‌های موجود در زیرلایه با $l=1$ در اتم عنصر اصلی X از شمار الکترون‌های لایهٔ سوم آن یک واحد کمتر باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ عنصر X نادرست است؟

(نمادهای X و Y فرضی هستند و X در دستهٔ p جدول تناوبی قرار دارد.)

(۱) مجموع $n+l$ الکترون‌های ظرفیت آن ۳۳ است.

(۲) در آرایش الکترون - نقطه‌ای این عنصر ۶ جفت الکترون وجود دارد.

(۳) در ساختار لوویس مولکول X_2 ، ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(۴) در هر واحد فرمولی ترکیب این عنصر با عنصر Y ۱۲، سه یون وجود دارد.

۱۲۸- در کدام موارد زیر نسبت تعداد کاتیون‌ها به آنیون‌ها با این نسبت در کلسیم فسفید برابر نمی‌باشد؟

(الف) آلومینیم فسفید

(ب) منیزیم نیتريد

(پ) کلسیم نیتريد

(ت) کلسیم اکسید

(۱) الف و ب

(۲) الف و ت

(۳) ب و پ

(۴) پ و ت

۱۲۹- کدام موارد از مطالب زیر، در مورد آرایش الکترونی اتم عنصرهای دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای نادرست است؟

(ا) در ۴ عنصر، آخرین زیرلایه از الکترون پر است.

(ب) ۴ عنصر در آخرین زیرلایهٔ خود دارای یک الکترون هستند.

(پ) در ۲ عنصر زیرلایه با $l=2$ ، دارای ۵ الکترون است.

(ت) در ۱۰ عنصر حداقل یک زیرلایه با $n+l=5$ ، از الکترون پر است.

(۱) آ و ب

(۲) ب و پ

(۳) پ و ت

(۴) آ و ت

۱۳۰- اگر A ، B ، C ، D و E (به ترتیب افزایش عدد اتمی از A تا E) عنصرهای متوالی از جدول تناوبی باشند و C گاز نجیب

دورهٔ سوم باشد، کدام مطلب نادرست است؟

(۱) عناصر E و D جزء دستهٔ s جدول تناوبی محسوب می‌شوند.

(۲) A و B ترکیب مولکولی با فرمول AB_2 تشکیل می‌دهند.

(۳) اتم عنصر B در لایهٔ ظرفیت خود، هفت الکترون دارد.

(۴) A و D ترکیب یونی با فرمول DA تشکیل می‌دهند.

وقت پیشنهادی: ۱۰ دقیقه

شیمی ۳: مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۱ تا ۲۴

پاسخ دادن به این سؤالات برای همه دانش‌آموزان اختیاری است.

۱۳۱- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟ 

- (الف) آب گل‌آلود همانند شربت معده، یک مخلوط سوسپانسیون است.
 (ب) ذرات موجود در کلوفید و محلول برخلاف سوسپانسیون، در آب پایدار هستند.
 (پ) مخلوط پایدارشده آب و روغن با استفاده از صابون، نمونه‌ای از سوسپانسیون است.
 (ت) ذره‌های سازنده سوسپانسیون ذره‌های ریزماده می‌باشند که همانند کلوفید پایدار هستند.

(۱) الف و ب (۲) ب و ت (۳) ب و پ (۴) الف و ت

۱۳۲- کدام مطلب درباره پاک‌کننده غیرصابونی که کاتیون آن Na^+ و گروه R سیرشده آن ۱۷ اتم کربن دارد، نادرستاست؟ ($\text{C} = ۱۲, \text{O} = ۱۶ : \text{g.mol}^{-۱}$)

(۱) یک ترکیب آروماتیک سیرنشده محسوب می‌شود.

(۲) درصد جرمی اکسیژن در آن، به تقریب ۱۷٪ برابر درصد جرمی کربن است.

(۳) این پاک‌کننده، از موادی مانند بنزن طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شود.

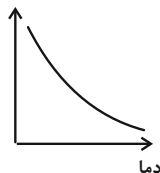
(۴) در ساختار آن، ۳ اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست.

۱۳۳- اگر استر بلند زنجیر سه عاملی A دارای ۶۳ اتم کربن بوده و تمام پیوندهای کربن-کربن در آن به صورت یگانه باشد، جرم مولی

این استر برابر چند گرم بر مول است و در اثر واکنش این استر با مقدار کافی سدیم هیدروکسید، فرمول شیمیایی صابون تولید

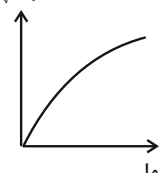
شده کدام است؟ ($\text{O} = ۱۶, \text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱ : \text{g.mol}^{-۱}$)۱۳۴- کدام نمودار زیر نادرست است؟ (تنها روند صعودی یا نزولی نمودارها مورد توجه باشد). 

درصد لکه باقی‌مانده



(۲)

قدرت پاک‌کنندگی صابون



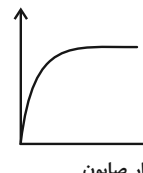
(۱)

مقدار پاک‌کنندگی



(۴)

ارتفاع کف ایجاد شده



(۳)

مشابه سؤال‌هایی که با آیکون  مشخص شده‌اند در امتحانات تشریحی وجود دارد.

۱۳۵- کدام گزینه درباره شوینده با فرمول $\text{RC}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$ نادرست است؟

(۱) در ساختار آن ۹ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

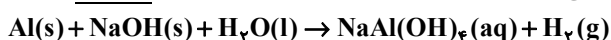
(۲) با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب واکنش نمی‌دهد.

(۳) طی واکنش‌های پیچیده از مواد پتروشیمیایی به دست می‌آید.

(۴) افزون بر برهمکنش با آلاینده‌ها، با آن‌ها واکنش شیمیایی نیز می‌دهد.

۱۳۶- مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم که به عنوان پاک‌کننده برای باز کردن مجاری مسدود شده در برخی وسایل و دستگاه‌های

صنعتی استفاده می‌شود، مطابق معادله موازنه نشده زیر با آب واکنش می‌دهد. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد آن نادرست است؟



(۱) واکنش انجام شده یک واکنش گرما ده است.

(۲) مجموع ضرایب مواد موجود در واکنش پس از موازنه برابر ۹ است.

(۳) گاز تولید شده در این واکنش، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.

(۴) از این پودر برای باز کردن لوله‌هایی استفاده می‌شود که بر اثر تجمع چربی‌ها بسته شده‌اند.

۱۳۷- مطابق مدل آرنیوس محلول در آب به شمار می‌آید، چرا که پس از حل شدن در آب باعث افزایش غلظت یون خواهد شد.

(۱) اتیلن گلیکول، اسید، هیدرونیوم

(۲) منیزیم کلرید، باز، هیدروکسید

(۳) کربن دی‌اکسید، اسید، هیدرونیوم

(۴) اتانول، باز، هیدروکسید

۱۳۸- محلولی ۱۵ درصد جرمی از HX با جرم مولی ۱۵۰ گرم بر مول و درصد یونش ۱ درصد و چگالی 0.8 g.mL^{-1} موجود است.

نسبت مجموع غلظت یون‌های موجود در این محلول به غلظت اولیه HX کدام است؟

(۱) ۰/۰۲ (۲) ۰/۰۱ (۳) ۰/۰۴ (۴) ۰/۰۳

۱۳۹- این شکل‌ها واکنش دو قطعه نوار منیزیم یکسان را با محلول دو اسید متفاوت در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند؛ کدام یک از

گزینه‌های زیر نادرست است؟



(آ)



(ب)

(۱) حباب‌های گاز ایجاد شده مربوط به گاز هیدروژن است.

(۲) ثابت یونش اسیدی (K_a) اسید موجود در محلول (آ) از (ب) کوچک‌تر است.

(۳) پیش از واکنش با نوار منیزیم، محلول (آ) رسانایی الکتریکی بیشتری از محلول (ب) داشت.

(۴) اسیدهای موجود در محلول (ب) و (آ) به ترتیب می‌توانند فورمیک اسید و نیتریک اسید باشند.

۱۴۰- ترتیب رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی زیر در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (در تمام محلول‌ها دما 25°C است.)

(I) محلول ۰/۰۲ مولار سدیم کلرید

(II) محلول ۰/۰۱۶ مولار هیدروکلریک اسید

(III) محلول ۰/۰۶ مولار اسید HA با درصد یونش ۲٪

(IV) محلول ۲ مولار اتانول

(۱) $\text{IV} > \text{I} > \text{II} > \text{III}$ (۲) $\text{I} > \text{II} > \text{III} > \text{IV}$ (۳) $\text{I} > \text{III} > \text{II} > \text{IV}$ (۴) $\text{II} > \text{I} > \text{IV} > \text{III}$

دفترچه پاسخ

آزمون ۱۶ مرداد ۱۴۰۵ اختصاصی دوازدهم ریاضی



پدیدآورندگان

نام درس	نام طراحان
حسابان ۲ و ریاضی پایه	امیر محمد باقری نصرآبادی - شاهین پروازی - رحمان پور رحیم - عادل حسینی - طاهر دادستانی - وحید راحتی - محمدرضا راسخ - سهیل ساسانی - یاسین سپهر - علی سلامت - علی اصغر شریفی - علی شهبابی - حمید علیزاده - معین کرمی - سید سپهر متولیان - لیلیا مرادی - حمیدرضا نوش کاران - سهند ولیزاده
هندسه و آمار و ریاضیات گسسته	امیر حسین ابومحبوب - حنا - اتفاقی - علی احمدی قزل دشت - اسحاق اسفندیار - حمیدرضا امیری - علی ایمانی - محبوبه بهادری - فرزاد جواد - سید محمدرضا حسینی فرد - محمد حمیدی - افشین خاصه خان - فرزانه خاکپاش - محمد خندان - کیوان دارابی - مصطفی دیداری - سوگند روشنی - علیرضا شریف خطیبی - هومن عقیلی - احمدرضا فلاح - امیر حسین ملازینل - مهرداد ملوندی - حمید ناصر
فیزیک	پویا شمشیری - خسرو ارغوانی فرد - بابک اسلامی - محمد اکبری - حسین الهی - عبدالرضا امینی نسب - زهره آقامحمدی - محمدعلی راست پیمان - بهنام رستمی - مسعود قره خانی - محسن قندچلر - مصطفی کیانی - آراس محمدی - حسین مخدومی - مرتضی مرتضوی - سیده ملیحه میر صالحی - سیدعلی میرنوری - حسام نادری - مصطفی واثقی
شیمی	هدی بهاری پور - محمدرضا پور جاوید - علی جدی - امیر حاتمیان - ارژنگ خانلری - حمید ذیحی - حسن رحمتی - کوکند - پویا رستگاری - فرزاد رضایی - علی رفیعی - سهراب صادقی زاده - محمد حسین صادقی مقدم - آترین صبا - علی طرفی - امیر حسین طیبی - محمد فائز نیا - میثم کوثری لشگری - علیرضا کیانی دوست - علی مجیدی - مجتبی محبوب - حسین ناصری نانی - میثم نوری

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی پایه	هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سید سپهر متولیان	امیر حسین ملازینل	امیر حسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
گروه ویراستاری	سینا صالحی آرین غلامی امیر حسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیر حسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیر حسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیر تر کمبور زهره آقامحمدی	احسان پنجه شاهی آترین صبا امیر حسین توحیدی
مسئول درس	سید سپهر متولیان	امیر حسین ملازینل	امیر حسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	ابراهیم نوری	علیرضا نجفی
ویراستاران (مستندسازی)	معصومه صنعت کار - امیر محمد علپور - مهسا محمدنیا - فرشته کمرانی				
			سجاد بهارلویی		فاطمه الهی محسن دستجردی رزیتا حبیب اله

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: علیرضا همایون خواه
حروف نگار	فرزانه فتح اله زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلمچی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳



حسابان ۱

۱- گزینه «۴»

(سیرسپهر متولیان)

گزینه (۱): با فرض $x = -2$ در رابطه، به معادله
 $\sqrt{y+3} = y+3$ می‌رسیم، که دو جواب $y = -2$ و $y = -3$ را دارد. از
 آن جایی که به ازای $x = -2$ دو مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه
 یک تابع نیست.

گزینه (۲): با فرض $x = 3$ در رابطه، به معادله $2y^3 - 5y = 0$ می‌رسیم،
 خواهیم داشت:

$$2y^3 - 5y = 0 \Rightarrow y(2y^2 - 5) = 0 \Rightarrow y = 0, y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

از آن جایی که به ازای $x = 3$ سه مقدار برای y به دست آمده، پس این
 رابطه یک تابع نیست.

گزینه (۳): با فرض $x = 0$ در رابطه، به معادله $|y| = 1$ می‌رسیم که دو
 مقدار برای y به دست می‌آید.

گزینه (۴): ابتدا با ضابطه‌بندی داریم:

$$x = \sqrt[3]{2y - |y|} = \begin{cases} \sqrt[3]{2y} & ; y \geq 0 \\ \sqrt[3]{3y} & ; y < 0 \end{cases}$$

که در هر حالت به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ فقط یک y حقیقی
 پیدا می‌شود.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۲- گزینه «۲»

(سیرسپهر متولیان)

ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} : x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ \sqrt{3-x} : 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \{3\}$$

پس تابع f ، تنها مقدار $f(3) = 0$ را دارد. برای اینکه g با f برابر باشد،

عبارت درجه دوم زیر رادیکال باید ضریبی منفی از $(x-3)^2$ باشد.

$$ax^2 + 2x + b = a(x-3)^2 = ax^2 - 6ax + 9a$$

$$\Rightarrow -6a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = 9a = -3 \Rightarrow ab = 1$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۳- گزینه «۳»

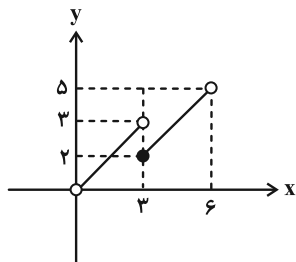
(امیرمحمدر باقری نصرآبادی)

به صورت زیر، در بازه‌های مختلف، ضابطه‌های مختلف تابع f را به دست می‌آوریم:

$$0 < x < 3 \Rightarrow 0 < \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$3 \leq x < 6 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

و نمودار تابع به صورت زیر است:



سطح زیر این نمودار از یک مثلث و یک دوزنقه تشکیل شده است که
 مساحت آن برابر است با:

$$S = \left(\frac{3 \times 3}{2}\right) + \left(\frac{2+5}{2}\right) \times 3 = \frac{9}{2} + \frac{21}{2} = 15$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴- گزینه «۴»

(سعیل ساسانی)

شرط تابع بودن $(3, n-2) = (3, -2) \Rightarrow n-2 = -2 \Rightarrow n = 0$

شرط یک‌به‌یک بودن $(m^2 - m, 1) = (2, 1)$

$$\Rightarrow m^2 - m = 2 \Rightarrow \underbrace{m^2 - m - 2}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ ق ق} \\ m = 2 \Rightarrow (1, 5), (-2, 5) \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases} \text{ (غیر یک به یک)}$$

$$\Rightarrow n = 0, m = -1 \Rightarrow (m, n) = (-1, 0)$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۵- گزینه «۳»

(عارل حسینی)

اگر f و f^{-1} بر هم مماس شوند، به معنای آن است که هر کدام بر خط

$y = x$ مماس هستند. پس داریم:

$$\xrightarrow{f(x)=x} ax^2 + \frac{3}{2} = x \Rightarrow ax^2 - x + \frac{3}{2} = 0$$



معادله بالا باید جواب مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(a)\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - 6a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

پس $x \geq 0$; $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 9)$ و $f^{-1}(x) = \sqrt{6x - 9}$ است.

$$\Rightarrow f^{-1}(12a) = f^{-1}(2) = \sqrt{3}$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

۶- گزینه «۴»

(علی شهرابی)

در تساوی $\frac{3f(x)-2}{f(x)-1} = f(f(x))$ ، جای $f(x)$ ها، متغیر x قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

برای محاسبه $f^{-1}(8)$ باید معادله $f(x) = 8$ را حل کنیم:

$$\frac{3x-2}{x-1} = 8 \Rightarrow 3x-2 = 8x-8 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = 6/5$$

پس: $f^{-1}(8) = 6/5$ است.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۷- گزینه «۴»

(کتاب زور ۹۸)

$$f(x) = \frac{2}{5}x - 4 \quad g(x) = x^3 + x$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = a \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(8)) = a$$

ابتدا $f^{-1}(8)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(8) = m \Rightarrow f(m) = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}m - 4 = 8 \Rightarrow m = 30$$

$$g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(30) = a \Rightarrow g(a) = 30$$

$$\Rightarrow a^3 + a = 30 \xrightarrow{\text{امتحان گزینه‌ها}} a = 3$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۱ و ۶۶ تا ۶۸)

۸- گزینه «۱»

(عارل حسینی)

دامنه‌های دو تابع f و g به ترتیب $D_f = [-3, 3]$ و $D_g = [-5, +\infty)$ است و دامنه تابع $f \circ g$ را از رابطه زیر حساب می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \geq -5 \mid -3 \leq -\sqrt{x+5} \leq 3\}$$

$$= \{x \geq -5 \mid \sqrt{x+5} \leq 3\} = \{x \geq -5 \mid x \leq 4\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = [-5, 4]$$

این بازه شامل ۱۰ عدد صحیح است.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۹- گزینه «۲»

(یاسین سپهر)

$$(f - g)\left(-\frac{7}{2}\right) = f\left(-\frac{7}{2}\right) - g\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(2\left[-\frac{7}{2}\right] - 1\right) - \left[-\frac{35}{2}\right]$$

$$= -9 + 18 = 9$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۱۰- گزینه «۱»

(محمدرضا راسخ)

می‌دانیم که همواره $0 \leq x - [x] < 1$ و مقدار $x - [x]$ به ازای x های صحیح برابر صفر می‌شود، پس دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ شده و خواهیم داشت:

$$D_{g \circ f} = D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

حال ضابطه تابع $g \circ f$ را می‌نویسیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x - [x]}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x - [x]} + \frac{1}{|x - [x]|}}$$

$$\xrightarrow{0 < x - [x] < 1} (g \circ f)(x) = \frac{x - [x]}{2}$$

حال داریم:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x - [x]}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < (g \circ f)(x) < \frac{1}{2}$$

در نتیجه $a = 0$ و $b = \frac{1}{2}$ و لذا $2b + a = 1$ است.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)



ریاضی ۱

۱۱- گزینه «۱»

(عادل حسینی)

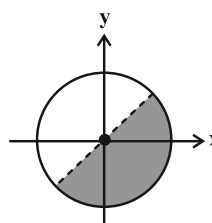
$$\cos \theta - \cot \theta = \cot \theta (\sin \theta - 1) < 0$$

عبارت $\sin \theta - 1$ همواره نامثبت است. پس برای برقراری نامساوی بالا، لازم

است که $\cot \theta$ مثبت باشد. به عبارت دیگر انتهای کمان θ باید در

ربع‌های اول یا سوم قرار بگیرد. از طرفی در محدوده مشخص شده شکل زیر،

$$\sin \theta < \cos \theta \text{ است.}$$



در شکل بالا، اگر بخش‌های مربوط به ربع‌های اول و سوم را در نظر بگیریم،

شکل گزینه «۱» حاصل می‌شود.

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

۱۲- گزینه «۲»

(سیرسپهر متولیان)

روش اول: با توجه به روابط بین عبارات مثلثاتی، $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را به دست

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

می‌آوریم:

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم } \alpha} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha + 0 / 75}{\tan \alpha + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{3} + 1} = \frac{\frac{3 - \sqrt{7}}{4}}{\frac{3 - \sqrt{7}}{3}} = \frac{3}{4} = 0 / 75$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} = 0 / 75$$

روش دوم:

$$\frac{\sin \alpha + 0 / 75}{\tan \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha + 1}$$

$$= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} = \cos \alpha = 0 / 75$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

۱۳- گزینه «۴»

(رسمان پوررهم)

شیب خط برابر با $\tan \alpha$ می‌باشد. بنابراین:

$$\tan \alpha = -2 / 5 \quad (*)$$

برای یافتن حاصل عبارت $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ ، صورت و مخرج را بر $\cos \alpha$

تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{-2 / 5 + 1}{1 - (-2 / 5)} = \frac{-1 / 5}{3 / 5} = -\frac{1}{3}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۰ و ۴۱)

۱۴- گزینه «۲»

(معین کرمی)

ابتدا دو طرف رابطه را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 \sin^2 x + 9 \cos^2 x + 12 \sin x \cos x = 4$$

اگر به جای $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ قرار دهیم رابطه زیر به دست می‌آید:

$$5 \cos^2 x + 12 \sin x \cos x = 0$$

از $\cos x$ فاکتور می‌گیریم:

$$\cos x (5 \cos x + 12 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \tan x : \text{تعریف نشده} \\ 5 \cos x = -12 \sin x \Rightarrow \tan x = \frac{-5}{12} \end{cases}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

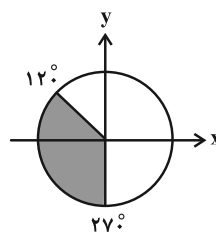


۱۵- گزینه «۲»

(سهند ولی زاده)

با توجه به دایره مثلثاتی رسم شده داریم:

$$12^\circ < \alpha < 27^\circ \Rightarrow -1 \leq \cos \alpha < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{3m-1}{2} < 0$$



$$\times 2 \rightarrow -2 \leq 3m - 1 < 0$$

$$+1 \rightarrow -1 \leq 3m < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq m < \frac{1}{3}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

۱۶- گزینه «۱»

(عادل فسینی)

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}} \Rightarrow a^6 b = 1 \\ b = (\sqrt{6} + \sqrt{5})^3 \end{cases}$$

پس $a^3 b = \frac{1}{a^3} = a^{-3}$ است.

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۸ و ۶۵ تا ۶۷)

۱۷- گزینه «۳»

(علی اصغر شریفی)

$$A = (\delta^{-2})^{-\frac{5}{8}} = \delta^{\frac{5}{4}}$$

$$(\delta A)^{-\frac{2}{9}} = (\delta \times \delta^{\frac{5}{4}})^{-\frac{2}{9}} = (\delta^{\frac{9}{4}})^{-\frac{2}{9}} = \delta^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۸- گزینه «۴»

(شمیر علیرزاه)

برای موارد نادرست یک مثال نقض می‌یابیم:

نادرست است. $a = \frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2})^5 > (\frac{1}{2})^3$. گزینه «۱»

نادرست است. $a = -\frac{1}{2} \rightarrow (-\frac{1}{2})^6 > (-\frac{1}{2})^2$. گزینه «۲»

نادرست است. $a = -2 \rightarrow (-2)^5 > (-2)^4$. گزینه «۳»

دقت شود که رابطه $a^5 > a^4$ فقط برای $a > 1$ برقرار است.

درست است. $a < -1 \Rightarrow a^6 > a^4$. گزینه «۴»

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۱۹- گزینه «۱»

(طاہر راستانی)

$$\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{\lambda ab - 2ab}{\lambda ab + 2ab} = \frac{6ab}{10ab} = 0.6$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۲۰- گزینه «۱»

(محمدرضا راسخ)

$$A = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow A = 2\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow (A+1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)



حسابان ۲

۲۱- گزینه «۲»

(علی سلامت)

برای تبدیل نمودار تابع $g(x)$ به نمودار $h(x)$ ابتدا لازم است آن را ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. لذا عرض نقطه مورد نظر برابر ۱ خواهد بود.

در ضمن می‌دانیم نقطه A بر روی تابع $g(x)$ قرار دارد، پس داریم:

$$g(2) = -1 \Rightarrow f(4-1) - 1 = -1 \Rightarrow f(3) = 0$$

حال ورودی تابع $y = f(x+4) + 1$ ، یعنی $x+4$ را برابر ۳ قرار می‌دهیم

$$a+4=3 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow A'(-1, 1)$$

بنابراین نقطه جدید در ربع دوم قرار دارد.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۲۲- گزینه «۳»

(عادل مسینی)

ابتدا ضابطه g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x+1)^2 \xrightarrow{\text{طول نقاط دو برابر می‌شود.}} y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین / یک واحد به چپ}} g(x) = \left(\frac{x+1}{2} + 1\right)^2 - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{(x+3)^2}{4} - 1$$

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} x^2 + 2x + 1 = \frac{x^2 + 6x + 9}{4} - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{x^2 + 6x + 5}{4} \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب حقیقی دارد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{2}{3}$ است. پس

مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای f و g برابر $-\frac{2}{3}$ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۲۳- گزینه «۱»

(عمید رضا نوش‌کران)

$$3 \leq \frac{3x}{2} \leq 6 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_{y=f\left(\frac{3x}{2}\right)} = [2, 4]$$

$$-2 \leq x-3 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_{y=g(x-3)} = [1, 4]$$

دامنه تابع h ، اشتراک دامنه‌های $f\left(\frac{3x}{2}\right)$ و $g(x-3)$ است، یعنی:

$$D_h = [2, 4] \cap [1, 4] = [2, 4]$$

(حسابان ۲- تابع: مرتبط با کار در کلاس ۱ صفحه ۱۰)

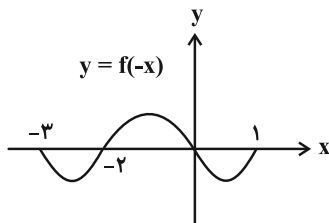
۲۴- گزینه «۲»

(شاهین پروازی)

با توجه به دامنه تابع f ، ابتدا دامنه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$D_g: -f(-x) | f(-x) | \geq 0 \Rightarrow -f(-x) \geq 0 \Rightarrow f(-x) \leq 0$$

با رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ محدوده نامثبت را در نظر می‌گیریم:



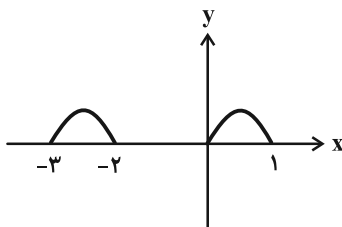
$$f(-x) \leq 0 \Rightarrow D_g = [-3, -2] \cup [0, 1]$$

حال ضابطه g را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{-f(-x) | f(-x) |}$$

$$\xrightarrow{f(-x) \leq 0} g(x) = \sqrt{f^2(-x)} = |f(-x)|$$

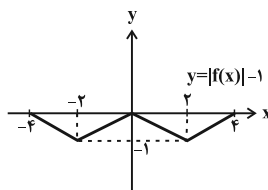
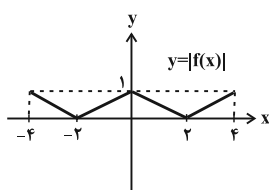
با توجه به دامنه تابع g ، نمودار نهایی به صورت زیر است:



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۲۵- گزینه «۲»

(عمید علیزاده)





(سویل ساسانی)

۲۸- گزینه «۳»

از روی شکل معلوم است که ضابطه تابع به فرم $f(x) = -(x+2)^3 + 8$ می باشد. بعد از ساده سازی داریم:

$$-(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 8 = -x^3 - 6x^2 - 12x$$

حال با فاکتورگیری از $-x$ عبارت را به فرم صورت سؤال درمی آوریم:

$$-x(x^2 + 6x + 12) = (0-x)(x^2 + 6x + 12)$$

و از مساوی قرار دادن عبارت اخیر و ضابطه سؤال:

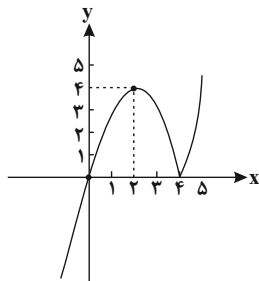
$$k=0, m=6, n=12 \Rightarrow \frac{k+n}{m} = \frac{0+12}{6} = 2$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۱۱۳ و ۱۱۴)

(لیلا مرادی)

۲۹- گزینه «۴»

قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم و نمودار تابع را رسم می کنیم:



$$y = |x-4| = \begin{cases} x-4 & ; x \geq 4 \\ -x+4 & ; x < 4 \end{cases}$$

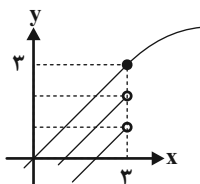
تابع در بازه $[2, 4]$ و هر زیرمجموعه ای از آن نزولی است، بنابراین $\text{Max}(b-a) = 4-2 = 2$.

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۱۷)

(ویدر رافتی)

۳۰- گزینه «۲»

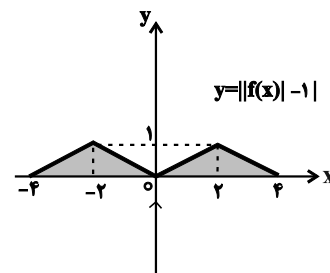


در رسم تابع f ، جایگاه نقطه توخالی $(3, 15-m)$ معلوم نیست. برای آن که تابع صعودی شود (طبق نمودار)، کافی است شرط زیر برقرار باشد:

$$15-m \leq f(3) = 3 \Rightarrow m \geq 12$$

پس در محدوده m ، ۱۱ عدد طبیعی قرار ندارد.

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۱۵ تا ۱۸)



$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخوده}} = 2 \text{ (مساحت مثلث)} = 2 \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 1 \right) = 4$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۲ تا ۱۲)

۲۶- گزینه «۳» (علی شهرابی)

مرحله به مرحله از تابع $y = f(x)$ به تابع $y = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 6$ می رسمیم:

	۶ واحد بالا	۶، ۴، ۲، ۱	۶، ۴، ۲، ۱	۶، ۴، ۲، ۱
	x ها، ۲ برابر	y ها، قرینه	x ها، ۲ برابر	y ها، قرینه
ضابطه	$f(x)$	$f\left(\frac{x}{2}\right)$	$-f\left(\frac{x}{2}\right)$	$g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 6$
دامنه	$[-3, 4]$	$[-6, 8]$	$[-6, 8]$	$[-6, 8]$
برد	$[-1, 2]$	$[-1, 2]$	$[-2, 1]$	$[4, 7]$

$$\Rightarrow D_g \cap R_g = [-6, 8] \cap [4, 7] = [4, 7]$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۲ تا ۱۲)

(مشابه سوال ۵ فروردین ۱۳۹۴)

۲۷- گزینه «۳» (محمدرضا راسخ)

فرض می کنیم x_1, x_2, x_3, x_4 صفرهای تابع f باشند. در نتیجه

صفرهای تابع $y = -3f(5-2x)$ به صورت

$$\frac{5-x_1}{2}, \dots, \frac{5-x_4}{2} \text{ می باشد. حال داریم:}$$

$$\frac{5-x_1}{2} + \frac{5-x_2}{2} + \frac{5-x_3}{2} + \frac{5-x_4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 10 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

مجموع صفرهای تابع $y = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$ برابر می شود با:

$$2(x_1 + 1) + 2(x_2 + 1) + 2(x_3 + 1) + 2(x_4 + 1)$$

$$= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_4) + 8 = 2(19) + 8 = 46$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۲ تا ۱۲)



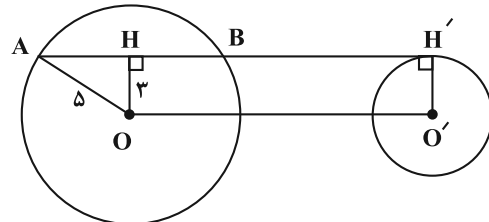
هندسه ۲

۳۱- گزینه «۴»

(شانه اتفاقی)

مطابق شکل چهارضلعی $OHH'O'$ مستطیل است، پس

$OH = R' = ۳$ است و در نتیجه در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:



$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$

$$\Rightarrow AB = ۲AH = ۲ \times ۴ = ۸ \Rightarrow OO' = ۲AB = ۱۶$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{۱۶^2 - (۵ - ۳)^2} = \sqrt{۲۵۶ - ۴}$$

$$= \sqrt{۲۵۲} = \sqrt{۷ \times ۳۶} = ۶\sqrt{۷}$$

(هنر سه ۲- رایره: صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۳۲- گزینه «۱»

(فرزانه فاکپاش)

فرض کنید R و R' شعاع‌های دو دایره $(R > R')$ و TT' طول مماس

مشترک خارجی دو دایره باشد. چون دو دایره، فقط سه مماس مشترک

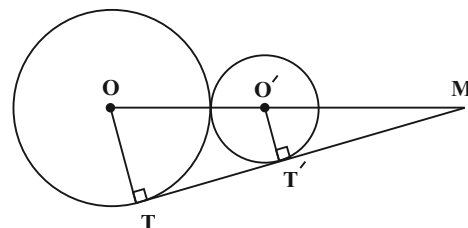
دارند، پس نسبت به هم مماس خارج هستند و در نتیجه داریم:

$$TT' = ۲\sqrt{RR'} \xrightarrow{R=۸R'} ۲\sqrt{۸R' \times R'} = ۴\sqrt{۲}R'$$

(هنر سه ۲- رایره: صفحه‌های ۲۰ و ۲۳)

۳۳- گزینه «۲»

(مبویه بواوری)



طول خط‌المركزین دو دایره برابر است با:

$$OO' = R + R' = ۹ + ۴ = ۱۳$$

در مثلث MOT، طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$O'T' \parallel OT \Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{MO'}{MO' + ۱۳} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۹MO' = ۴MO' + ۵۲ \Rightarrow ۵MO' = ۵۲$$

$$\Rightarrow MO' = \frac{۵۲}{۵} = ۱۰ \frac{۲}{۵}$$

(هنر سه ۲- رایره: صفحه‌های ۲۰ و ۲۳)

۳۴- گزینه «۱»

(فرزانه فاکپاش)

اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر a باشد، آن گاه داریم:

$$r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^2}{\frac{۳a}{۲} - a}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^2}{\frac{a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \sqrt{۳} \Rightarrow a = ۲$$

در نتیجه محیط مثلث برابر $۳a = ۶$ واحد است.

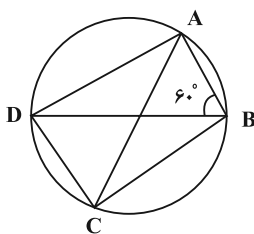
(هنر سه ۲- رایره: صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۵- گزینه «۲»

(مهمر شمیری)

زاویه‌های روبه‌رو در چهارضلعی ABCD مکمل یکدیگرند، پس این

چهارضلعی محاطی است.



در مثلث ABD داریم:

$$\hat{ADB} + ۶۰^\circ + ۷۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{ADB} = ۴۵^\circ$$

حال در دایره محیطی چهارضلعی ABCD داریم:

$$\hat{ACB} = \hat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{۲} \Rightarrow \hat{ACB} = ۴۵^\circ$$

(هنر سه ۲- رایره: صفحه ۲۷)



۳۶- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

طبق فرض در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $r = 2 - \sqrt{2}$ و

$r_b = r_c = \sqrt{2}$ است. داریم:

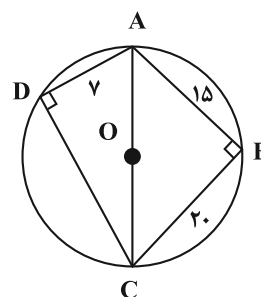
$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{r_a} &= \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2(2 - \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})} \\ \Rightarrow r_a &= \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{(3\sqrt{2} - 4)} \times \frac{3\sqrt{2} + 4}{3\sqrt{2} + 4} \\ &= \frac{\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۹)

۳۷- گزینه «۱»

(امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به اینکه عمود منصف‌های اضلاع چهارضلعی $ABCD$ هم‌رس هستند، پس این چهارضلعی محاطی است و چون مرکز دایره محیطی چهارضلعی (نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها) روی قطر AC قرار دارد، پس AC قطر دایره محیطی نیز هست و در نتیجه زوایای B و D قائمه هستند و طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABC : AC^2 &= AB^2 + BC^2 = 225 + 400 = 625 \\ \Rightarrow AC &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ADC : AC^2 &= CD^2 + AD^2 \Rightarrow 625 = CD^2 + 49 \\ \Rightarrow CD^2 &= 576 \Rightarrow CD = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{15 \times 20}{2} + \frac{24 \times 7}{2} \\ &= 150 + 84 = 234 \end{aligned}$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه ۲۷)

۳۸- گزینه «۴»

(مهمرب قنبران)

$\triangle CDF$ زاویه خارجی ADE و $\triangle BCD$ زاویه خارجی FCD است، بنابراین:

$$\begin{cases} \hat{CDF} = \hat{A} + \hat{E} = 2x + x = 3x \\ \hat{BCD} = \hat{F} + \hat{CDF} = (x + 30^\circ) + 3x = 4x + 30^\circ \end{cases}$$

چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow 2x + (4x + 30^\circ) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 6x = 150^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه ۲۷)

۳۹- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومحبوب)

اندازه هر ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R ، برابر

$$2R \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ و اندازه هر ضلع } n \text{ ضلعی منتظم محیط بر همان دایره برابر } 2R \tan \frac{180^\circ}{n} \text{ است. پس خواسته سؤال برابر است با:}$$

$$\begin{aligned} \frac{2R \sin \frac{180^\circ}{10}}{10} &= \frac{\sin 18^\circ}{\tan 9^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}} = \frac{2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} \\ &= 2 \cos^2 9^\circ = 2a^2 \end{aligned}$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴۰- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومحبوب)

طول هر ضلع n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع r از رابطه

$$a = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \text{ به دست می‌آید. بنابراین با فرض } n = 6 \text{ و } a = 4 \text{ داریم:}$$

$$4 = 2r \times \tan 30^\circ \Rightarrow 2 = r \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$S = \pi r^2 = 12\pi$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)



هندسه ۱

۴۱- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومصوب)

در هر مثلث، نسبت ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع، عکس نسبت اندازه‌های آن دو ضلع است. حال اگر $a = 9$ و $b = 15$ باشد، با توجه به فرض سؤال داریم:

$$h_a + h_b = 4h_c \xrightarrow{+h_c} \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_b}{h_c} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 4 \Rightarrow \frac{c}{9} + \frac{c}{15} = 4$$

$$\xrightarrow{\times 45} 5c + 3c = 180 \Rightarrow 8c = 180 \Rightarrow c = 22.5$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴۲- گزینه «۲»

(عمیر ناصر)

طبق قضیه تالس در دو مثلث AEC و ABC داریم:

$$DF \parallel AE \Rightarrow \frac{CF}{EF} = \frac{CD}{AD} \quad (1)$$

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AD} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{CF}{EF} = \frac{CE}{BE} \xrightarrow{CF=1/5 EF} \frac{CE}{BE} = \frac{2}{5} \Rightarrow BE = \frac{5}{2} CE$$

اگر $EF = x$ باشد، آن‌گاه از روابط بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} CF = \frac{3x}{2} \\ BE = \frac{5x}{3} \end{cases}$$

دو مثلث EDF و BDC در ارتفاع رسم شده از رأس D مشترک‌اند، پس

نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های متناظر است و در نتیجه داریم:

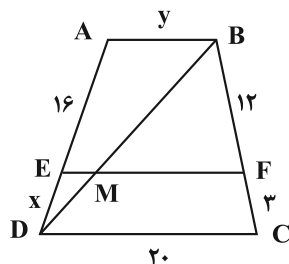
$$\frac{S_{EDF}}{S_{BDC}} = \frac{EF}{BC} = \frac{x}{\frac{3}{2}x + x + \frac{5}{3}x} = \frac{x}{\frac{25}{6}x} = \frac{6}{25} = 0.24$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴۳- گزینه «۱»

(علی احمدی قزل‌رشت)

خط BD را رسم می‌کنیم تا پاره‌خط EF را در نقطه M قطع کند.



طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BM}{MD} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

حالا از تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های ABD و BDC استفاده می‌کنیم:

$$\triangle BDC : MF \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{MF}{DC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MF}{20} = \frac{12}{15} \Rightarrow MF = 16$$

$$\Rightarrow EM = EF - MF = 18 - 16 = 2$$

$$\triangle ABD : EM \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{EM}{AB} = \frac{DE}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{4}{20} \Rightarrow y = 10$$

$$x + y = 4 + 10 = 14 \quad \text{بنابراین داریم:}$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۴۴- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومصوب)

بین طول اضلاع مثلث اولی، رابطه فیثاغورس برقرار است و لذا طبق عکس

قضیه فیثاغورس، این مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. $(8^2 + 15^2 = 17^2)$

مثلث دومی که با مثلث اولی متشابه است، قطعاً قائم‌الزاویه می‌باشد و زمانی مساحت آن بیشترین مقدار ممکن می‌شود که اضلاع به طول x و y متناظر با

اضلاع به طول ۱۵ و ۱۷ در مثلث اولی باشد. داریم:

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{15} = \frac{y}{17} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{45}{4} \\ y = \frac{51}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{بیشترین مساحت مثلث دوم} : S = \frac{1}{2} \left(6 \times \frac{45}{4} \right) = \frac{135}{4}$$

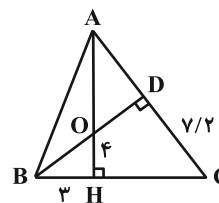
(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه ۳۸)



۴۵- گزینه «۴»

(اسحاق اسفندیار)

مطابق شکل داریم:



$$\Delta BOH : BO^2 = BH^2 + OH^2 \Rightarrow BO = 5$$

دو مثلث BDC و BHO به دلیل داشتن یک زاویه مشترک 90° و یک

زاویه مشترک $\hat{B}$ با هم متشابه هستند. بنابراین:

$$\Delta BHO \sim \Delta BDC \xrightarrow{(ز.ز)} \frac{OH}{CD} = \frac{BO}{BC}$$

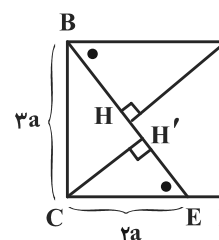
$$\Rightarrow \frac{4}{7/2} = \frac{5}{3+CH} \Rightarrow 3+CH=9 \Rightarrow CH=6$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۴۶- گزینه «۲»

(مهردار ملونری)

با فرض $ED = a$ ، اطلاعات صورت سؤال را در شکل زیر جای گذاری می‌کنیم:



طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{ABH} = \hat{CEH'}$ است و در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ \\ \hat{ABH} = \hat{CEH'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تساوی دوزاویه}} \Delta ABH \sim \Delta CEH'$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH'} = \frac{AB}{CE} = \frac{3a}{2a} \Rightarrow \frac{AH}{CH'} = \frac{3}{2} = 1/5$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

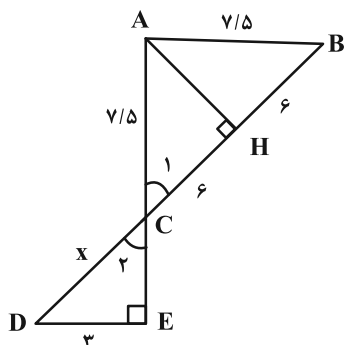
۴۷- گزینه «۲»

(علی احمدی قزل‌رشت)

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعده BC، میانه نظیر

$$BH = CH = 6$$

این ضلع است، پس داریم:



طبق قضیه فیثاغورس در مثلث AHC، طول ارتفاع AH را به دست می‌آوریم:

$$\Delta AHC : AH^2 = AC^2 - CH^2 = 7^2 - 6^2$$

$$= (7/5 - 6)(7/5 + 6) = \frac{11}{4} \Rightarrow AH = \frac{9}{2}$$

دو مثلث AHC و DEC به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند، زیرا:

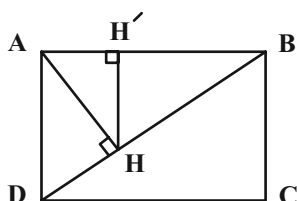
$$\left. \begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \text{ (متقابل به راس)} \\ \hat{H} = \hat{E} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز.ز)} \Delta AHC \sim \Delta DEC$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{AH}{DE} \Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 5$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴۸- گزینه «۱»

(امیر حسین ابومصوب)

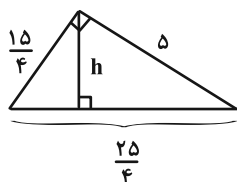




$$\frac{x+y=35}{4} \rightarrow x + \frac{75}{4x} = \frac{35}{4} \xrightarrow{x \neq 0} 4x^2 - 35x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (4x-15)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \Rightarrow y = 5 \\ x = 5 \Rightarrow y = \frac{15}{4} \end{cases}$$

فاصله رأس مربع بزرگ از نزدیک‌ترین ضلع مربع کوچک، همان طول ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه زیر است. داریم:



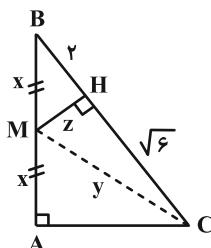
$$2 \times \text{مساحت مثلث} = \frac{15}{4} \times 5 = \frac{25}{4} h \Rightarrow h = 3$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۵، ۴۱ و ۴۲)

(هومن عقیلی)

۵۰- گزینه «۲»

M را به C وصل می‌کنیم. مطابق شکل، طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$\begin{aligned} y^2 &= z^2 + 6 \\ - \quad x^2 &= z^2 + 4 \\ \hline y^2 - x^2 &= 2 \Rightarrow AC^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2} \end{aligned}$$

راه دوم:

$$\triangle BHM \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{y}{2x} = \frac{x}{2+\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{6}$$

$$AC^2 = (2 + \sqrt{6})^2 - 4(2 + \sqrt{6}) = (2 + \sqrt{6})(2 + \sqrt{6} - 4)$$

$$= (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2) = 2$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 144 + 48 = 192 \Rightarrow BD = 8\sqrt{3}$$

طبق روابط طولی در این مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 144 = BH \times 8\sqrt{3} \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

حال اگر از H، عمود HH' را بر ضلع AB رسم کنیم، آن‌گاه طبق تعمیم

قضیه تالس در مثلث ABD داریم:

$$HH' \parallel DA \Rightarrow \frac{HH'}{DA} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{HH'}{6\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \Rightarrow HH' = 3\sqrt{3}$$

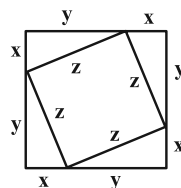
(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۵، ۴۱ و ۴۲)

۴۹- گزینه «۱»

(مهریار ملونری)

مطابق شکل، رئوس مربع کوچک، اضلاع مربع بزرگ را به دو قسمت به

طول‌های x و y تقسیم کرده است. طبق فرض داریم:



$$\begin{cases} 4(x+y) = 35 \Rightarrow x+y = \frac{35}{4} \\ 4z = 25 \Rightarrow z = \frac{25}{4} \end{cases}$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = z^2$$

$$\Rightarrow 2xy = \left(\frac{35}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{(35-25)(35+25)}{4^2} = \frac{75}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{75}{4x}$$



هندسه ۳

۵۱- گزینه «۴»

(مهرادر ملونری)

با توجه به فرض برای دو ماتریس A و B داریم:

$$\begin{cases} A + 3B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\times 3} 3A - 3B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} 4A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس 4A برابر ۸ است، پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۲ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵ و ۱۹)

۵۲- گزینه «۱»

(افشین فاضله‌فان)

ماتریس AxB را محاسبه می‌کنیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2b & 3 & 2c \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ 2c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1 \\ -a + 2 + b = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۱۹)

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۲۱)

۵۳- گزینه «۱»

(امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} x+1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & x^2+x-y \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2 = x+y \Rightarrow y=2 \\ x^2+x-y=0 \xrightarrow{y=2} x^2+x-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

تذکر: به ازای $x=-2$ ، درایه‌های واقع بر قطر اصلی نیز برابر صفر می‌شوند، که این مقدار با توجه به فرض غیرصفر بودن ماتریس A، قابل قبول نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۱۹)

۵۴- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

طبق تعریف برای درایه‌های ماتریس‌های A و B داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 2-1 \\ 2(2)-1 & 2^2-1 \\ 2(3)-1 & 2(2)-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1-2+1 & 1-3+1 \\ 2+2(1) & 2^2-1 & 2-3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر است با: $4+9-5=8$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۹)

۵۵- گزینه «۴»

(امیرحسین ملازینل)

برای دو ماتریس مربعی دلخواه A و B، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 + AB - BA$$

از آنجا که طبق فرض $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ شده است، نتیجه می‌گیریم $AB - BA = 0$ ، که این یعنی دو ماتریس A و B خاصیت تعویض‌پذیری دارند. در نتیجه:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 4 \\ -a+3b & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 2a+6 \\ b-1 & 2b+3 \end{bmatrix}$$

حالا درایه‌های متناظر را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a-2 = a+2b \\ 2a+6 = 4 \\ b-1 = -a+3b \\ 2b+3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -1$$

در نتیجه $BA = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و جمع درایه‌های آن برابر صفر می‌شود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۵۶- گزینه «۲»

(کیوان دارابی)

به جای محاسبه کل ماتریس ABC، همان ستون مطلوب را پیدا می‌کنیم.

$$ABC = A(BC)$$

(ستون چهارم $A \times (BC)$ = ستون چهارم $(A(BC))$)(ستون چهارم $B \times C$ = ستون چهارم BC)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$



طبق فرض مسئله: $A^3 - A^2 = mA + nI$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 38 & 85 \\ 17 & 38 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 5m \\ m & 2m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 29 & 65 \\ 13 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+n & 5m \\ m & 2m+n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ 2m+n = 29 \Rightarrow 26+n = 29 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

در نتیجه: $m+n = 13+3 = 16$

روش دوم: طبق رابطه کیلی - همیلتون داریم:

$$A^2 = (2+2)A - (4-5)I \Rightarrow A^2 = 4A + I$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = (4A + I) \times A$$

$$\Rightarrow A^3 = 4A^2 + A = 4(4A + I) + A = 17A + 4I$$

$$\Rightarrow A^3 - A^2 = (17A + 4I) - (4A + I) = 13A + 3I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow m+n = 16$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

(مهردار ملونری)

۶۰- گزینه «۱»

با توجه به فرض، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۲»:

$$(AB)^T = (AB)(AB) = (AB)(B^T A) = A \underset{I}{B^T} A = A^2$$

گزینه «۳»:

$$(BA)^T = (BA)(BA) = B(AB)A = B(B^T A)A = \underset{I}{B^T} A^2 = A^2$$

همچنین از $AB = B^T A$ نتیجه می‌گیریم $BAB = B^T A = A$ و لذا

$$BA = BAB^T = (BAB)B^T = AB^T$$

گزینه «۴»:

$$(A^T B)^T = (A^T B)(A^T B) = A^T (BA)(AB)$$

$$= A^T (AB^T)AB = A^T (B^T A)B = I(AB)B = AB^T$$

در مورد گزینه «۱» داریم:

$$(AB^T)^T = (AB^T)(AB^T) = A(B^T A)B^T$$

$$= A(AB)B^T = A^T B^T = A^T$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

حال ماتریس A را از سمت چپ در ستون به دست آمده ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 8+8+24 = 40$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۵۷- گزینه «۴»

(علی ایمانی)

$$I = \begin{bmatrix} 3^{x-y} & 0 \\ x+y-z & 2^{x-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 3^{x-y} = 1 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow y = x = 1 \\ x+y-z = 0 \Rightarrow 1+1-z = 0 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 1+1+2 = 4$$

(هندسه ۳: ماتریس و کاربردها: صفحه ۱۹)

(برگرفته از کار در کلاس (۲) صفحه ۱۹)

۵۸- گزینه «۳»

(سولدر روشنی)

برای به دست آوردن توان‌های بزرگ ماتریس A ، سعی می‌کنیم الگویی را بین توان‌های آن تشخیص دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

$$\Rightarrow A^2 = A^2 A = (2A)A = 2A^2 = 2(2A) = 2^2 A$$

از روابط فوق می‌توانیم نتیجه بگیریم که $A^n = 2^{n-1} A$. بنابراین داریم:

$$A^{12} = 2^{11} A = \begin{bmatrix} 2^{11} & -2^{11} \\ -2^{11} & 2^{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 2 \times 2^{11} = 2^{12}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۰)

۵۹- گزینه «۱»

(سیرمهرضا عسینی فرد)

روش اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 85 \\ 17 & 38 \end{bmatrix}$$



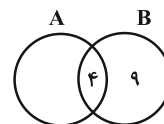
آمار و احتمال

۶۱- گزینه «۴»

(مصطفی درباری)

ابتدا متمم مجموعه مذکور را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(A \cup (A' \cap B'))' &= A' \cap (A' \cap B')' = A' \cap (A \cup B) \\ &= \underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cup (A' \cap B) = A' \cap B = B - A\end{aligned}$$

پس مجموعه $B - A$ دارای $2^9 = 512$ زیرمجموعه است که یعنی ۹ عضودارد. $A \cap B$ نیز دارای ۱۵ زیرمجموعه ناتمامی است پس $2^4 = 16$ زیرمجموعه داشته و لذا ۴ عضو دارد. تعداد عضوهای مجموعه B برابر است با:

$$|B| = |B - A| + |A \cap B| = 9 + 4 = 13$$

پس مجموعه B دارای ۱۳ عضو بوده و $\binom{13}{2} = 78$ زیرمجموعه دوعضوی دارد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۶۲- گزینه «۱»

(فرزانه شاکباش)

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}(A \cap B)' \cap (A \cup B)' \cap C &= [(A' \cup B') \cap (A \cup B)] \cap C \\ &= \underbrace{[(A' \cap A) \cup B']}_{\emptyset} \cap C = B' \cap C\end{aligned}$$

طبق فرض مسئله، این مجموعه برابر مجموعه C است. بنابراین داریم:

$$B' \cap C = C \Rightarrow C - B = C$$

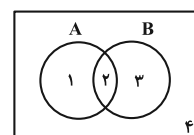
$$\xrightarrow{B \neq \emptyset} C \text{ و } B \Rightarrow B \cap C = \emptyset \text{ جدا از هم هستند.}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۶۳- گزینه «۱»

(فرزاد جوادری)

نمودار ون را می‌کشیم و از روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها استفاده می‌کنیم:



$$\begin{aligned}&[(A \cup B) - B] \cap [(A \cap B) \cup B'] \\ &= [(1, 2, 3) - (2, 3)] \cap [(2) \cup (1, 4)] \\ &= [1] \cap [1, 2, 4] = (1) \text{ ناحیه } A - B\end{aligned}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۶۴- گزینه «۳»

(سوکندر روشنی)

چون دو مجموعه A و B ناتمامی هستند، از فرض نتیجه می‌گیریم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$$

پس قطعاً $c = 3$ است و حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 8 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 8 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 14 \\ a + b + c = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 3 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 13 \\ a + b + c = 9 \end{cases}$$

بنابراین پنج مقدار صحیح ۳، ۸، ۹، ۱۳ و ۱۴ قابل قبول است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۶۵- گزینه «۲»

(امیرمسین ایوبیوب)

با توجه به تعریف مجموعه‌های A و B داریم:

$$\begin{cases} n(A) = \left| \frac{100}{6} \right| = 16 \\ n(B) = \left| \frac{100}{8} \right| = 12 \\ n(A \cap B) = \left| \frac{100}{24} \right| = 4 \end{cases}$$

حالا طبق تعریف ضرب دکارتی داریم:

$$n(A \times B - B \times A) = n(A \times B) - n((A \times B) \cap (B \times A))$$

$$= n(A) \times n(B) - (n(A \cap B))^2$$

$$= 16 \times 12 - 4^2 = 192 - 16 = 176$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)



۶۶- گزینه «۱»

(سیر ممبرها سبب فرور)

تعداد اعضای فضای نمونه این آزمایش برابر است با:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

حاصل ضرب اعداد رو شده دو تاس در صورتی عددی اول است که یک

تاس عدد یک و دیگری یکی از سه عدد ۲، ۳ و ۵ باشد. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} (1,2) \rightarrow \text{حالت ۲} \\ (1,3) \rightarrow \text{حالت ۲} \\ (1,5) \rightarrow \text{حالت ۲} \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 3 \times 2 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۶۷- گزینه «۳»

(اساق اسفندیار)

فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، حالت‌های انتخاب سالن‌ها توسط این

سه نفر است و چون هر نفر ۳ انتخاب دارد، پس:

$$n(S) = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

اگر A پیشامد حضور حداقل یک نفر در سالن ۳ باشد، آن‌گاه A' پیشامد

آن است که سالن ۳ خالی بماند که در این صورت هر فرد دارای ۲ انتخاب

$$n(A') = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

است، یعنی:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

بنابراین داریم:

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۶۸- گزینه «۳»

(سوکندر روشنی)

می‌دانیم جمع احتمال‌ها باید برابر یک بشود، بنابراین:

$$P(1) + P(2) + P(3) = 1 \Rightarrow \frac{\binom{4}{1}}{a \times 1!} + \frac{\binom{4}{2}}{a \times 2!} + \frac{\binom{4}{3}}{a \times 3!} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a} + \frac{3}{a} + \frac{2}{3a} = 1 \Rightarrow \frac{12+9+2}{3a} = 1 \Rightarrow a = \frac{23}{3}$$

مطلوب سوال برابر است با:

$$P(2) - P(3) = \frac{3}{a} - \frac{2}{3a} = \frac{7}{3a} = \frac{7}{23}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۶۹- گزینه «۲»

(امیرحسین ایومپوب)

فرض کنید $P(a) = x$ باشد. در این صورت داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \Rightarrow x + 2x + 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = x + 2x = 3x = \frac{3}{7} \\ P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = 2x + 4x = 6x = \frac{6}{7} \end{array} \right.$$

در نتیجه احتمال وقوع پیشامد $\{a, b\}$ به اندازه $\frac{3}{7}$ از احتمال وقوعپیشامد $\{b, c\}$ کمتر است.

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۷۰- گزینه «۳»

(امیرحسین ملازینل)

اگر پیشامد ابتلای این فرد به گرمزدگی و آفتاب‌سوختگی را به ترتیب با A

و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$\Rightarrow 0/2 = 1 - (0/6 + 0/3 - P(A \cap B))$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/1$$

احتمال اینکه این فرد فقط گرمزده شود، برابر است با:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/6 - 0/1 = 0/5$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)



ریاضیات گسسته

۷۱- گزینه «۳»

(عمیدرضا امیری)

اگر $a = 2$ و $b = 3$ باشد، آنگاه $ab = 6$ زوج است ولی $a + b = 5$ فرد می‌باشد. سایر موارد قضایای کلی هستند و همواره برقرارند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۷۲- گزینه «۴»

(سوکندر روشنی)

بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست؛ مثال نقض: اگر عدد گویا را صفر در نظر بگیریم، حاصل ضربش در هر عدد گنگ برابر صفر می‌شود که عددی گویا است.

(۲) نادرست؛ مثال نقض: به ازای $n = 6$ ، اعداد 6^3 و 6^5 به دست می‌آیند که هیچ کدام عدد اول نیستند.

(۳) نادرست؛ مثال نقض: $n = 3 \Rightarrow 2^6 + 1 = 65$

(۴) درست؛ زیرا برای این که رابطه گفته شده، درست باشد، باید حداقل یکی از اعداد a یا b صفر باشد:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a+b = a+b+2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

بنابراین در مجموعه اعداد طبیعی، این گزاره درست است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲ و ۳)

۷۳- گزینه «۱»

(امیرمسین ابومصوب)

عدد $4k + 1$ قطعاً عددی فرد است و در صورتی که مربع کامل باشد، قطعاً مربع عددی فرد خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$4k + 1 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$$

$$\Rightarrow k = n^2 + n = n(n + 1)$$

دقت کنید که طبق فرض $k > 2$ می‌توان گفت:

$$4k + 1 > 9 \Rightarrow (2n + 1)^2 > 9 \Rightarrow 2n + 1 > 3 \Rightarrow n > 1$$

پس k همواره به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی است.

بدیهی است عددی به فرم $n(n + 1)$ در صورت طبیعی بودن n ، هیچ‌گاه نمی‌تواند مربع کامل باشد و به ازای $n > 1$ ، هیچ‌گاه عددی اول نیست.

این عدد تنها در صورتی مضرب ۳ است که یکی از دو عدد n یا $n + 1$ مضرب ۳ باشند و مثلاً به ازای $n = 4$ ، نمی‌تواند مضرب ۳ باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳ تا ۶)

۷۴- گزینه «۳»

(کیوان دارابی)

می‌دانیم حاصل ضرب عدد گویا در عدد گویا، عددی گویا است، بنابراین:

$$-3(\alpha - \beta) = 3\beta - 3\alpha \in Q$$

بنابراین $3\beta - 3\alpha$ عددی گویا است. از طرفی:

$$3\beta + 2\alpha = 3\beta - 3\alpha + 5\alpha$$

که $3\beta - 3\alpha$ طبق نتیجه بالا عددی گویا است و 5α طبق فرض عددی گنگ است. در عین حال با برهان خلف ثابت می‌شود مجموع عددی گویا و عددی گنگ همواره گنگ است و در نتیجه $3\beta + 2\alpha$ عددی گنگ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه ۵)

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۸)

۷۵- گزینه «۲»

(سوکندر روشنی)

اگر مجذور عددی صحیح زوج باشد، خود عدد نیز زوج است. در نتیجه:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \text{زوج} \Rightarrow \begin{cases} n = 4k \\ \text{یا} \\ n-1 = 4k \Rightarrow n = 4k+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 \leq 4k \leq 99 \Rightarrow 3 \leq k \leq 24 \\ 10 \leq 4k+1 \leq 99 \Rightarrow 3 \leq k \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \text{مقدار ۲۲}$$

$$\Rightarrow \text{مقدار ۲۲}$$

بنابراین n می‌تواند ۴۴ مقدار متمایز را اختیار کند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه کار در کلاس (ب) صفحه ۵)

۷۶- گزینه «۳»

(امیرمسین ابومصوب)

طبق اثبات به روش بازگشتی، حکم را درست فرض کرده و در نتیجه داریم:

$$x^2 + y^2 \geq x + y - \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 \geq 2x + 2y - 1$$



$$r = 5 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a_{\min} = 7r = 35 \quad \checkmark$$

$$r = 10 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow a_{\max} = 7r = 70 \quad \checkmark$$

$$r = 15 \Rightarrow b = 18 \Rightarrow a = 105 \quad \times$$

پس تفاضل حداکثر و حداقل مقدار دو رقمی مقسوم برابر ۳۵ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲، ۱۴ و ۱۵)

(کیوان دارابی)

گزینه «۱» - ۷۹

ابتدا عبارت داخل سوال را ساده‌تر می‌کنیم:

$$(12a^2, 9ab) = 3 | a | (4a, 3b)$$

از آنجا که b عددی فرد است، پس عامل ۲ ندارد. در نتیجه $3b$ نیز عامل ۲ ندارد. بنابراین عامل ۲ در این b م بی‌تأثیر است و می‌توانیم آن را کنار بگذاریم:

$$(4a, 3b) = (a, 3b)$$

$$(a, 3b) = | a | \quad \text{بنابراین } a | 3b \text{ و در نتیجه:}$$

$$(12a^2, 9ab) = 3 | a | \times | a | = 3a^2 \quad \text{بنابراین:}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۰، ۱۳، ۱۶ و ۱۷)

(امیرمسین ملازینل)

گزینه «۲» - ۸۰

مطابق فرض سوال می‌دانیم:

$$\begin{cases} a | 9k + 7 \xrightarrow{\times 7} a | 63k + 49 & (1) \\ a | 7k + 6 \xrightarrow{\times 9} a | 63k + 54 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a | (63k + 54) - (63k + 49)$$

$$\Rightarrow a | 5 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1, a = 5$$

در نتیجه اختلاف مقادیر طبیعی ممکن برای a برابر ۴ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه مثال صفحه ۱۲)

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) + (x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر همواره درست است و تمام روابط برگشت‌پذیر هستند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۸)

(علیرضا شریف‌فطیپی)

گزینه «۱» - ۷۷

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$$

$$\xrightarrow{(*)} a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0$$

رابطه اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) که در آن a و b اعداد

صحیح و غیرصفر باشند، برقرار نیست.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه تمرین ۵ صفحه ۸)

(اسمدرضا فلاح)

گزینه «۳» - ۷۸

قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$a = bq + r \xrightarrow{a=7r} 7r = bq + r \Rightarrow 6r = bq \quad (1)$$

با توجه به شرط تقسیم می‌دانیم:

$$r < b \xrightarrow{\times 6} 6r < 6b \Rightarrow bq < 6b \Rightarrow q < 6 \Rightarrow q_{\max} = 5$$

$$\xrightarrow{(1)} 6r = 5b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 | 6r \Rightarrow 5 | r & \text{یعنی } r \text{ مضرب } 5 \text{ است.} \\ 6 | 5b \Rightarrow 6 | b & \text{یعنی } b \text{ مضرب } 6 \text{ است.} \end{cases}$$



فیزیک ۲

۸۱- گزینه «۴»

(پویا شمشیری)

با توجه به رابطه (۱) ظرفیت خازن نصف می‌شود. $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ (۱)

با توجه به رابطه (۲) و ثابت بودن V ، بار خازن نصف می‌شود.

$$Q = CV \quad (2)$$

با توجه به رابطه (۳) و ثابت بودن V ، انرژی خازن نصف می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad (3)$$

با توجه به رابطه (۴) و ثابت بودن V ، اندازه میدان بین صفحات خازن

$$E = \frac{V}{d} \quad (4)$$

نصف می‌شود.

(فیزیک ۲- الکتریسیته ساکن: صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۸۲- گزینه «۲»

(مسعود قره‌فانی)

طبق رابطه انرژی ذخیره شده در خازن داریم:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

پس از آن که به اندازه ۲۵ درصد بار ذخیره شده در خازن، بار الکتریکی منفی از صفحه مثبت جدا کرده و به صفحه منفی منتقل کنیم، مقدار Q نیز ۲۵ درصد افزایش خواهد یافت؛ یعنی:

$$Q_2 = 1/25 Q_1 = \frac{5}{4} Q \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2} \frac{(\frac{5}{4} Q)^2}{C} = \frac{25}{16} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{9}{16} \times \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 45J$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{Q^2}{10 \times 10^{-6}} = 45J$$

$$\Rightarrow Q^2 = 16 \times 10^{-4} \Rightarrow Q = 4 \times 10^{-2} C$$

$$\Rightarrow Q = 40 \times 10^{-3} C = 40mC$$

(فیزیک ۲- الکتریسیته ساکن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۸۳- گزینه «۳»

(آراس مومری)

با استفاده از رابطه ظرفیت خازن تخت داریم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow d = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{C} = \frac{10 \times 9 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^{-4}}{18 \times 10^{-9}} = 10^{-5} m$$

و چون در صورت سؤال گفته است که اگر میدان بیشتر از $5 \times 10^7 \frac{N}{C}$ شود

خازن دچار فروریزش می‌شود پس اختلاف پتانسیل میان دو صفحه خازن نیز بیشینه می‌شود و داریم:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow V_{\max} = E_{\max} d = 5 \times 10^7 \times 10^{-5} = 500V$$

حال طبق رابطه $q = CV$ ، بیشترین بار ذخیره شده در خازن را به دست می‌آوریم:

$$q_{\max} = C V_{\max} \Rightarrow q_{\max} = 18 \times 10^{-9} \times 500 = 90 \times 10^{-7} C = 9 \mu C$$

(فیزیک ۲- الکتریسیته ساکن: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۸۴- گزینه «۴»

(فسرو ارغوانی‌فر)

از رابطه $I = \frac{q}{t}$ استفاده می‌کنیم:

$$I = 50mA = 5 \times 10^{-2} A$$

$$\xrightarrow{q=ne} I = \frac{ne}{t} \Rightarrow 5 \times 10^{-2} = \frac{n \times 1.6 \times 10^{-19}}{120}$$

$$\Rightarrow n = \frac{60}{16} \times 10^{19} = 3.75 \times 10^{19} \text{ الکترون}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۸)

۸۵- گزینه «۴»

(مسام نادری)

بنابه رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، چون مقاومت با طول سیم رابطه مستقیم دارد،

مقاومت $\frac{1}{2}$ از طول سیم برابر 9Ω $R_2 = \frac{1}{2} R_1 = \frac{1}{2} \times 18 = 9\Omega$ می‌شود.

اکنون اگر طول این سیم ($L_2 = \frac{1}{2} L_1$) را به طول سیم

اولیه ($L_3 = L_1$) برسانیم، چون جرم و در نتیجه حجم سیم ثابت می‌ماند،

مساحت سطح مقطع آن $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.

$$V_2 = V_3 \Rightarrow A_2 L_2 = A_3 L_3$$

$$\xrightarrow{\frac{L_2 = \frac{1}{2} L_1}{L_2 = L_1}} A_2 \times \frac{1}{2} L_1 = A_3 \times L_1 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{2} A_2$$

اکنون با داشتن طول و سطح مقطع سیم در حالت جدید، مقاومت آن را می‌یابیم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_3}{R_2} = \frac{L_3}{L_2} \times \frac{A_2}{A_3}$$

$$\xrightarrow{R_2 = 9\Omega} \frac{R_3}{9} = \frac{L_1}{\frac{1}{2} L_1} \times \frac{A_2}{\frac{1}{2} A_2} \Rightarrow \frac{R_3}{9} = 4 \Rightarrow R_3 = 36\Omega$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۶)



۸۶- گزینه «۴»

(مسین الهی)

ابتدا با استفاده از رابطه $\rho' = \frac{m}{V}$ حجم کابل را به دست می آوریم:

$$\rho' = \rho = 2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$m = \rho' \times V \Rightarrow 5 = 2000 \times V \Rightarrow V = \frac{5}{2000} \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow A \times L = \frac{5}{2000} \text{ m}^3 \quad (\text{I})$$

با استفاده از رابطه مقاومت کابل و همچنین قانون اهم داریم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{R=\frac{V}{I}} \frac{V}{I} = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{90}{75} = 2 \times 10^{-7} \times \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{30 \times 10^{-7}}{75} = \frac{L}{A} \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{(\text{II}), (\text{I})} L^2 = \frac{5}{2000} \times \frac{30 \times 10^{-7}}{75} = \frac{15}{150} \times 10^{-5} = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow L = 10^{-2} = 100 \text{ m}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۸۷- گزینه «۴»

(عبدالرضا امینی نسب)

طبق متن کتاب درسی، گزینه «۴» صحیح نیست و بقیه گزینه‌ها صحیح هستند.

مقاومت نوری، نوعی از مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده

شده به آن بستگی دارد و با افزایش شدت نور، از مقاومت آن کاسته می‌شود.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۹)

۸۸- گزینه «۱»

(مصطفی واثقی)

ابتدا با استفاده از داده‌های روی نمودار نسبت $\frac{R_A}{R_B}$ را می‌یابیم. با توجه به

نمودار، اگر V_A چهار واحد باشد I_A دو واحد و اگر V_B دو واحد

باشد، I_B چهار واحد می‌شود. بنابراین با استفاده از قانون اهم داریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{I_B}{I_A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{4}{2} \times \frac{4}{2} = 4$$

اکنون نسبت $\frac{I_A}{I_B}$ را به ازای اختلاف پتانسیل یکسان می‌یابیم:

$$I = \frac{V}{R} \xrightarrow{V_A=V_B} \frac{I_A}{I_B} = \frac{R_B}{R_A} \xrightarrow{\frac{R_B}{R_A}=\frac{1}{4}} \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{4}$$

در آخر، با توجه به اینکه $I = \frac{q}{t}$ و $q = ne$ است، نسبت $\frac{n_A}{n_B}$ را پیدا می‌کنیم.

$$I = \frac{q}{t} = \frac{ne}{t} \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{t_B}{t_A}$$

$$\xrightarrow{\frac{t_A=t}{t_B=3t}} \frac{1}{4} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{3t}{t} \Rightarrow \frac{n_A}{n_B} = \frac{1}{12}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۰)

۸۹- گزینه «۲»

(مسین الهی)

$$R_1 = \rho_1 \frac{L}{A} = 6 / 9 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m} \times \frac{1 / 2 \text{ m}}{2 / 3 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 36 \Omega$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{L}{A} = 10 / 25 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m} \times \frac{1 / 2 \text{ m}}{2 / 3 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 54 \Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \times 100 = \frac{54 - 36}{36} \times 100 = \frac{18}{36} \times 100 = 50\%$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۵)

۹۰- گزینه «۲»

(مهدی اکبری)

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) در یک سیم فلزی که اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر صفر است

الکترون‌های آزاد با تندی‌هایی از مرتبه $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در حال حرکت‌اند.

(۳) اندازه سرعت سوق در یک رسانای فلزی مثلاً در سیم‌های مسی از مرتبه

بزرگی $10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است.

(۴) جهت قراردادی جریان الکتریکی I ، برخلاف جهت سوق الکترون‌ها است.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۷)

فیزیک ۱

۹۱- گزینه «۴»

(مصطفی کیانی)

وقتی فاصله بین مولکول‌ها را کم کنیم نیروی دافعه به هم وارد می‌کنند و وقتی مولکول‌ها را کمی از هم دور کنیم، این نیرو به صورت جاذبه ظاهر می‌شود.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۲)

۹۲- گزینه «۲»

(مصطفی کیانی)

هر یک از عبارت‌ها را بررسی نموده و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص می‌کنیم:
(الف) نادرست؛ چون نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب کوچک‌تر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و شیشه است، آب سطح شیشه را تر می‌کند.
(ب) درست؛ کشش سطحی در مایع‌ها، در واقع همان نیروی ربایشی از نوع هم‌چسبی موجود در سطح مایع است.

(پ) درست

(ت) نادرست؛ چون نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و سطح داخلی لوله کوچک‌تر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های جیوه است، جیوه درون لوله رو به پایین حرکت می‌کند و از سطح جیوه درون ظرف نیز پایین‌تر می‌رود.

بنابراین از چهار عبارت داده شده، دو عبارت آن درست‌اند.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲)

۹۳- گزینه «۴»

(زهرا آقاممیری)

فشار کل در عمق h از یک مایع برابر است با:

$$\Rightarrow P = 1000 \times 10 \times 0.5 + 98000 = 100000 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$$

اگر در عمق h' فشار را با P' نشان دهیم، داریم:

$$P' = 1/1 P \Rightarrow \rho g h' + P_0 = 1/1 \times (100000)$$

$$\Rightarrow 1000 \times 10 \times h' = 15000 \Rightarrow h' = 1/5 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

پس اگر 10 cm دیگر پایین برویم، فشار کل ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۹۴- گزینه «۲»

(بهنام رستمی)

اگر سطح مقطع دهانه ظرف را a ، سطح مقطع کف ظرف را A و وزن مایع اضافه شده را F' فرض کنیم، رابطه زیر برقرار است:

$$F' = mg = 0/3 \times 10 = 3 \text{ N}$$

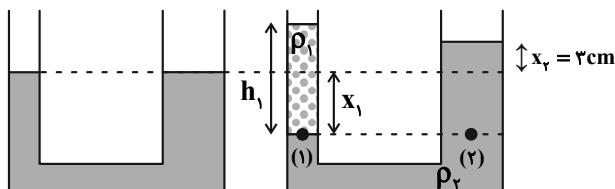
$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{A} = \frac{F'}{a} \Rightarrow \Delta F = \frac{A}{a} F' \Rightarrow \Delta F = \frac{A}{\frac{1}{4} A} \times 3 = 12 \text{ N}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۹۵- گزینه «۲»

(عبدالرضا امینی نسب)

هرگاه مایعی به شاخه سمت چپ اضافه شود، سطح مایع اولیه در این شاخه به اندازه X_1 پایین می‌رود و در شاخه سمت راست، سطح مایع به اندازه X_2 بالا می‌رود. بنابراین طبق صورت سؤال $X_2 = 3 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = -2 \text{ cm}$ می‌باشد.



حجم مایع جابه‌جا شده در دو طرف لوله یکسان می‌باشد، داریم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 x_1 = A_2 x_2$$

$$\Rightarrow 30 \times x_1 = 60 \times 3 \Rightarrow x_1 = 6 \text{ cm}$$

در نهایت طبق اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز در نقاط (۱) و (۲) داریم:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 (x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow 1 h_1 = 2(6 + 3) \Rightarrow h_1 = 18 \text{ cm}$$

به عبارت دیگر ارتفاع مایع اضافه شده به سمت چپ برابر با 18 cm

می‌باشد. در نتیجه جرم مایع اضافه شده برابر است با:

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 h_1 = 1 \times 30 \times 18 = 540 \text{ g}$$

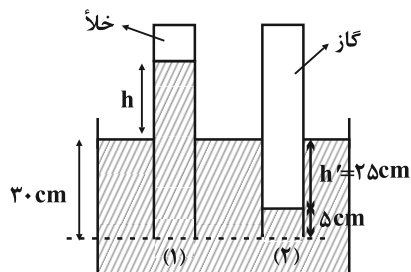
(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۹۶- گزینه «۲»

(زهرا آقاممیری)

با استفاده از اصل برابری فشار در نقاط هم‌تراز داخل یک مایع ساکن در لوله

(۱) داریم:



$$P_1 = \rho g h \xrightarrow{h=80-30=50 \text{ cm}} P_1 = 13600 \times 10 \times 0.5$$

$$\Rightarrow P_1 = 68000 \text{ Pa} = 68 \text{ kPa}$$

در لوله (۲) داریم:

$$P_2 = \rho g h' + P_1 = 13600 \times 10 \times 0.25 + 68000$$

$$\Rightarrow P_2 = 102000 \text{ Pa} = 102 \text{ kPa}$$

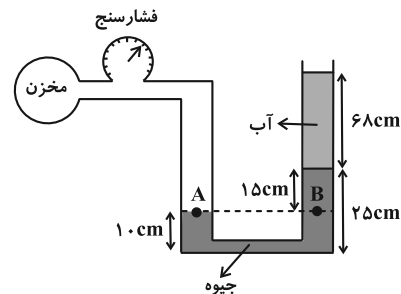
(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)



۹۷- گزینه «۳»

(سیرهملیه میرصالحی)

در مرحله اول فشار ستون آب را برحسب cmHg به دست می آوریم:



$$h_{\text{جیوه}} = \left(\frac{\rho_{\text{آب}}}{\rho_{\text{جیوه}}}\right) h_{\text{آب}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \left(\frac{1}{13.6}\right) \times 68 = 5 \text{ cmHg}$$

برای به دست آوردن فشار پیمانه‌ای مخزن، کافی است از قاعده هم‌فشاری نقاط هم‌تراز استفاده کنیم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{مطلق}} = P_0 + P_{\text{آب}} + P_{\text{جیوه}}$$

$$P_{\text{مطلق}} - P_0 = P_{\text{آب}} + P_{\text{جیوه}} = 5 + 15 = 20 \text{ cmHg}$$

فشارسنج، فشار پیمانه‌ای مخزن را نشان می‌دهد. بنابراین از نسبت داده شده، فشار هوا را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_{\text{پیمانه‌ای}}}{P_{\text{مطلق}}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{P_{\text{پیمانه‌ای}}}{P_{\text{مطلق}}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P_{\text{مطلق}} = 100 \text{ cmHg}$$

$$P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{مطلق}} - P_0 \Rightarrow 20 = 100 - P_0$$

$$\Rightarrow P_0 = 80 \text{ cmHg}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

۹۸- گزینه «۲»

(فسین مفرومی)

گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» از اثرات نیروی هم‌جسبی بین مولکول‌ها بوده و هر سه گزینه جلوه‌هایی از کشش سطحی هستند.

گزینه «۲» به اثر نیروی دگرچسبی بین جیوه و شیشه و کوچک‌تر بودن آن نسبت به نیروی هم‌جسبی بین مولکول‌های جیوه اشاره می‌کند و به کشش سطحی ارتباطی ندارد.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲)

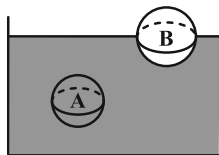
۹۹- گزینه «۳»

(حسین الهی)

کره توپر B روی سطح مایع شناور و کره توپر A داخل مایع غوطه‌ور است و به حالت تعادل قرار دارند. لذا نیروی شناوری و نیروی وزن هر یک از اجسام با یکدیگر برابر است:

$$\begin{cases} F_{bA} = m_A g \\ F_{bB} = m_B g \end{cases} \xrightarrow{F_{bB} > F_{bA}} m_B g > m_A g$$

$$\Rightarrow m_B > m_A \Rightarrow \rho_B V_B > \rho_A V_A \quad (*)$$



چون کره توپر B روی سطح مایع شناور است، لذا چگالی آن از چگالی مایع کمتر است و کره توپر A نیز چون غوطه‌ور می‌باشد، چگالی آن با چگالی مایع برابر است. بنابراین:

$$\rho_A > \rho_B \xrightarrow{(*)} V_B > V_A \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} > 1 \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} > 1$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۰۰- گزینه «۴»

(سیرعلی میرنوری)

در ابتدا تندی جریان آب را در قسمت پهن‌تر می‌یابیم:

$$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow 24 = 8t \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

$$t' = t_{\text{کل}} - t = 39 - 3 = 36 \text{ s}$$

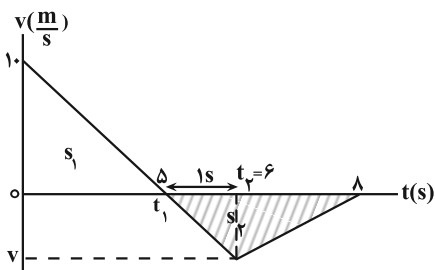
$$\Delta x' = v' \Delta t' \quad \text{در لوله پهن‌تر داریم:}$$

$$\Delta x' = 96 - 24 = 72 \text{ cm} \rightarrow 72 = v' \times 36 \Rightarrow v' = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

در نهایت داریم:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \xrightarrow{r=2 \text{ cm}} \frac{2}{8} = \left(\frac{r'}{2}\right)^2 \Rightarrow r' = 4 \text{ cm}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۳ تا ۳۵)



$$\left| \frac{v}{1} \right| = \left| \frac{v}{\lambda - t_2} \right| \Rightarrow \begin{cases} v = \lambda - t_2 \\ t_2 = 6s \Rightarrow t_1 = 5s \end{cases}$$

شتاب را در محدوده‌ای که شتاب در خلاف جهت محور است، به دست می‌آوریم:

$$a = -\frac{10}{5} = -2 \frac{m}{s^2}$$

و بعد معادله سرعت - زمان را می‌نویسیم و سرعت را در لحظه $t_2 = 6s$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -2t + 10$$

به دست می‌آوریم:

$$t_2 = 6s \Rightarrow v = -2 \times 6 + 10 = -2 \frac{m}{s}$$

مسافت متحرک در ۸ ثانیه نخست حرکت برابر مجموع اندازه جابه‌جایی‌ها است. (سطح زیر نمودار)

$$\text{مسافت} = |S_1| + |S_2| = \frac{5 \times 10}{2} + \frac{(8-5) \times 2}{2} \Rightarrow \text{مسافت} = 25 + 3 = 28$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۴- گزینه «۱»

(سیرهملیه میرصالحی)

حرکت خودروها، حرکت با سرعت ثابت است و معادله حرکت آن‌ها از رابطه $x = vt + x_0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{450 - 300}{10 - 0} = 15 \frac{m}{s}, \quad x_{0A} = 300m$$

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - (-300)}{10 - 0} = 30 \frac{m}{s}, \quad x_{0B} = -300m$$

$$x_A = 15t + 300, \quad x_B = 30t - 300$$

با داشتن معادله حرکت هر دو متحرک A و B داریم:

$$|x_A - x_B| = 150m \Rightarrow -15t + 600 = \pm 150 \Rightarrow \begin{cases} t = 5s \\ t = 3s \end{cases}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

(مشابه تمرین ۱-۶ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۱۰۵- گزینه «۲»

(سیرعلی میرنوری)

با توجه به این که متحرک در دو مرحله، کل مسیر حرکت را پیموده است، با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\frac{\frac{1}{5}d, v_{av1} = v}{\frac{1}{5}d, v_{av2} = \frac{1}{4}v}$$

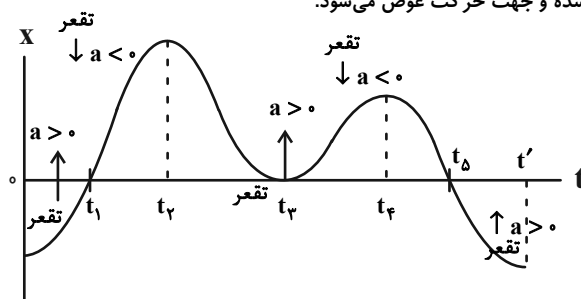
$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{5}d \\ \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{av1}} = \frac{1}{5} \frac{d}{v} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta x_2 = \frac{1}{5}d \\ \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{av2}} = \frac{1}{5} \frac{d}{\frac{1}{4}v} \end{cases}$$

فیزیک ۳

۱۰۱- گزینه «۴»

(مسعود قره‌فانی)

جهت حرکت متحرک در نقاطی عوض می‌شود که سرعت از مثبت به منفی یا از منفی به مثبت تغییر کند. (یعنی در قله‌ها و دره‌های نمودار مکان - زمان که شیب نمودار تغییر می‌کند)، پس در لحظات t_2 و t_4 سرعت صفر شده و جهت حرکت عوض می‌شود.



همچنین در زمان‌هایی که جهت تقعر نمودار تغییر می‌کند جهت شتاب تغییر می‌کند یعنی جهت شتاب ۴ بار تغییر کرده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۳ تا ۱۱)

۱۰۲- گزینه «۴»

(مفسن قنبرچهر)

برای متحرک a و نمودار مکان - زمان آن داریم:

حرکت در نقاط A و C کندشونده است، چون در حال نزدیک شدن به قله و دره مجاور خود در نمودار مکان - زمان هستند. (اندازه شیب نمودار در حال کاهش است).

حرکت در نقاط B و D تندشونده است، چون در حال دور شدن از قله و دره مجاور خود در نمودار مکان - زمان هستند. (اندازه شیب نمودار در حال افزایش است).

برای متحرک b و نمودار سرعت - زمان آن داریم:

حرکت در نقاط E و G تندشونده است، چون در حال دور شدن از محور t در نمودار سرعت - زمان می‌باشند. (اندازه سرعتشان در حال افزایش است).

حرکت در نقاط F و H کندشونده است، چون در حال نزدیک شدن به محور t در نمودار سرعت - زمان می‌باشند. (اندازه سرعتشان در حال کاهش است).

در نتیجه گزینه «۴» صحیح است که در آن، حرکت تمام نقاط مشخص شده، تندشونده هستند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۱۳)

۱۰۳- گزینه «۳»

(مرتضی مرتضوی)

شتاب (شیب نمودار سرعت - زمان) از ابتدا تا لحظه t_2 خلاف جهت محور است. اندازه شتاب از t_1 تا t_2 برابر اندازه شتاب از t_2 تا لحظه $t = 8s$ است.



از طرفی x_1 و x_2 در لحظه‌هایی رخ می‌دهد که دو متحرک A (که با شتاب ثابت در حال حرکت است) و B (که با سرعت ثابت در حال حرکت است) در یک مکان قرار دارند. بنابراین با توجه به معادله حرکت متحرک A (حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم)، داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t=t_1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0 \\ t=t_2 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_0t_2 + x_0 \end{cases} \quad (2)$$

بنابراین از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(\frac{1}{2}at_2^2 + v_0t_2 + x_0) - (\frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a(t_2 - t_1)(t_2 + t_1) + v_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \\ &\Rightarrow v_B = \frac{a(t_2 + t_1) + 2v_0}{2} \\ &\Rightarrow v_B = \frac{(at_2 + v_0) + (at_1 + v_0)}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_A(t_2) + v_A(t_1)}{2} \\ &\Rightarrow v_B = \frac{v + (-5)}{2} \Rightarrow (v_{av})_B = v_B = 1 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۰۹- گزینه «۱» (معمولی راست‌پیمان)

در ۶ ثانیه ابتدایی حرکت، داریم:

$$\begin{aligned} v_6 &= at_1 + v_0 \Rightarrow v_6 = 4 \times 6 + (-16) \Rightarrow v_6 = 8 \frac{m}{s} \\ \Delta x_1 &= \frac{v_6 + v_0}{2} \times t_1 = \frac{8 + (-16)}{2} \times 6 \Rightarrow \Delta x_1 = -24 m \end{aligned}$$

در بازه زمانی ۶s تا ۱۰s داریم:

$$\begin{aligned} v_{10} &= at_2 + v_0 \Rightarrow v_{10} = -2 \times 4 + 8 \Rightarrow v_{10} = 0 \\ \Delta x_2 &= \frac{v_{10} + v_6}{2} \times t_2 = \frac{0 + 8}{2} \times 4 \Rightarrow \Delta x_2 = 16 m \\ \Delta x_{کل} &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = -24 + 16 = -8 m \end{aligned}$$

بنابراین:

با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t} = \frac{-8}{10} = -0.8 \frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 0.8 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۱۰- گزینه «۴» (فسرو ارغوانی‌فر)

وقتی دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند، در یک لحظه مشخص، مکان آن‌ها با هم برابر می‌شود. پس:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = -t^2 - 4t \Rightarrow 2t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(2)(1) = -4 < 0$$

دلتای این معادله درجه دوم کوچکتر از صفر است، بنابراین معادله فوق جواب ندارد. پس دو متحرک هیچگاه از کنار هم عبور نمی‌کنند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\frac{4}{5}d + \frac{1}{5}d}{\frac{4d}{5v} + \frac{d}{5v}} = \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{1} \Rightarrow v_{av} = \frac{5}{8}v$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱۰۶- گزینه «۲» (مسام ناری)

حرکت خودرو را در جهت مثبت محور X فرض می‌کنیم. همچنین برای سادگی، مبدأ زمان و مکان را جایی در نظر می‌گیریم که محیطبان ترمز گرفته است که در $x_0 = 0 m$ و $v_0 = 72 \frac{km}{h}$ است. از طرفی، چون سرعت خودرو در جهت مثبت محور X به تدریج در حال کاهش است، شتاب آن برخلاف جهت محور X و در نتیجه منفی خواهد شد. به این ترتیب داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - (20 \frac{m}{s})^2 = 2(-5 \frac{m}{s^2})(x - 0)$$

$$-400 = -10x \Rightarrow x = 40 m$$

در نتیجه خودرو در $x = 40 m$ متوقف می‌شود و چون در لحظه ترمز گرفتن، فاصله گوزن و خودرو $70 m$ بوده است، فاصله بین خودرو و گوزن به صورت زیر به دست می‌آید:

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

(مشابه مثال ۱-۱۳ صفحه ۱۸)

۱۰۷- گزینه «۲» (مسام ناری)

موارد (پ) و (ث) صحیح نمی‌باشند و شکل صحیح آن‌ها به صورت زیر است: (پ) بردار شتاب متوسط همواره هم‌جهت با بردار تغییر سرعت می‌باشد. (ث) شیب خطی که نمودار سرعت-زمان را در دو لحظه به هم وصل می‌کند برابر با شتاب متوسط است.

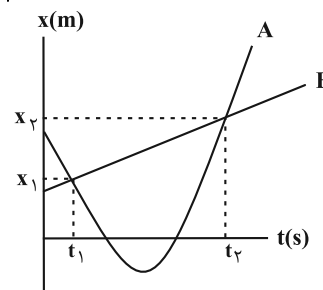
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱ تا ۲۱)

(برگرفته از آزمون نهایی شهریورماه سال ۱۳۹۹ و ۱۴۰۰)

۱۰۸- گزینه «۲» (بابک اسلامی)

چون متحرک B با سرعت ثابت در مسیری مستقیم در حال حرکت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک B با سرعت لحظه‌ای آن در هر بازه زمانی دلخواه یکسان است. برای محاسبه سرعت متحرک B داریم:

$$v_B = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$





شیمی ۲

۱۱۱- گزینه «۱»

(عمید زبئی)

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) فلزات از جمله منابع تجدیدناپذیر هستند و آهنک استخراج و مصرف آن‌ها از آهنک بازگشت آن‌ها به طبیعت بیشتر است.

(۲) پسماند سرانه سالانه فولاد، ۴۰ کیلوگرم است.

(۳) در استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن، تقریباً ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن آهن استفاده می‌شود.

(۴) از بازگردانی هفت قوطی فولادی آنقدر انرژی ذخیره می‌شود که می‌توان یک لامپ ۶۰ وات را در حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۱۱۲- گزینه «۳»

(ممد رضا پورچاویر)

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) عمده‌ترین قسمت نفت خام را هیدروکربن‌ها (نه کربوهیدرات‌ها) تشکیل داده‌اند.

(۲) نفت خام مایعی غلیظ (و نه رقیق) است که رنگ آن سیاه یا قهوه‌ای متمایل به سبز است.

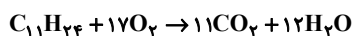
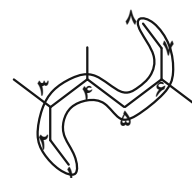
(۴) کمتر از ۱۰ درصد نفت خام مصرفی در دنیا برای تولید الیاف و پارچه، شوینده‌ها، مواد آرایشی و بهداشتی، رنگ، پلاستیک، مواد منفجره و لاستیک به کار می‌رود.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۱۱۳- گزینه «۴»

(پویا رستگاری)

ابتدا زنجیره اصلی را پیدا می‌کنیم و شماره‌گذاری می‌کنیم. با توجه به شماره‌گذاری صورت گرفته نام ترکیب به صورت ۳ و ۴ و ۶-تری‌متیل‌اوکتان است که فرمول آن معادل $C_{11}H_{24}$ می‌باشد. واکنش سوختن این ترکیب با گاز اکسیژن به صورت زیر است:



$$? LO_2 = \frac{17 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol } C_{11}H_{24}} \times \frac{1 \text{ mol } C_{11}H_{24}}{170 \text{ g } C_{11}H_{24}}$$

$$\times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{1 LO_2}{1 / 6 \text{ g } O_2} = 170 LO_2$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۰)

۱۱۴- گزینه «۲»

(امیر هاتمیان)

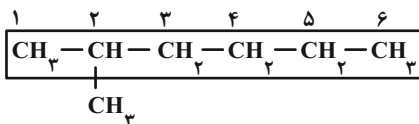
گرانروی آلکان‌ها با افزایش جرم مولی افزایش می‌یابد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

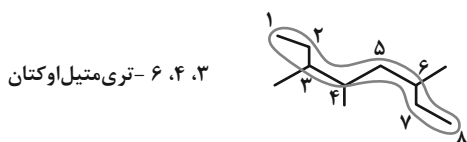
۱۱۵- گزینه «۱»

(علی رفیعی)

(۱) درست.



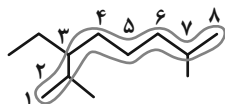
(۲) نادرست.



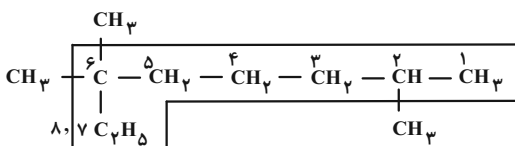
۳، ۴، ۶-تری‌متیل‌اوکتان

(۳) نادرست.

۳-اتیل-۲،۷-دی‌متیل‌اوکتان



(۴) نادرست.



۲، ۶، ۶-تری‌متیل‌اوکتان

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)



۱۱۶ - گزینه «۳»

(مهمر فائز نیا)

بررسی تمام گزینه‌ها:

مورد اول: پروپان (C_3H_8) نسبت به اتیلپنتان (C_7H_{16})، جرم مولی

کمتری دارد لذا نقطه جوش آن نیز از اتیلپنتان کمتر می‌باشد.

مورد دوم: تمایل به جاری شدن کمتر یعنی گرانروی بیشتر، وازلین نسبت به

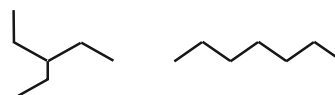
هگزان، گرانروی بیشتری دارد.

مورد سوم: قرار دادن فلزها در آلکان‌های مایع، مانع رسیدن آب به سطح فلز

می‌شود و از خوردگی فلز جلوگیری می‌کند. هگزان آلکانی مایع و بی‌رنگ

می‌باشد.

مورد چهارم: هر دو دارای ۶ پیوند کربن - کربن هستند.



(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۳۴ تا ۴۰)

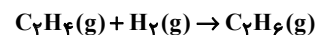
۱۱۷ - گزینه «۳»

(مجتبی محبوب)

اتان برخلاف اتن با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهد؛ زیرا هیدروکربنی

سیر شده است. بنابراین فقط گاز اتن با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد و

می‌توان مول اتن را محاسبه کرد.



$$? \text{ mol } C_2H_4 = \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_4}{1 \text{ mol } H_2} = 4 \text{ mol } C_2H_4$$

از طرفی با توجه به اینکه هر مول گاز در شرایط STP، ۲۲/۴ لیتر است پس

مقدار مول کل گازها را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{گاز } 12 \text{ mol} = \frac{1 \text{ mol گاز}}{22 / 4 \text{ L}} \times \text{گاز } 268 / 8 \text{ L} = \text{تعداد مول‌های گازی مخلوط}$$

بنابراین ۱۲ مول مخلوط گازی در اختیار داریم که ۴ مول آن را گاز اتن

تشکیل می‌دهد. پس درصد مولی اتان را به این صورت محاسبه می‌کنیم:

$$100 \times \frac{\text{تعداد مول اتان در مخلوط}}{\text{تعداد مول کل}} = \text{درصد مولی اتان}$$

$$\Rightarrow \frac{(12-4) \text{ mol}}{12 \text{ mol}} = \frac{8}{12} \times 100 \approx 66.6\%$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۳۶، ۳۷ و ۴۰ تا ۴۲)

۱۱۸ - گزینه «۴»

(علی طرفی)

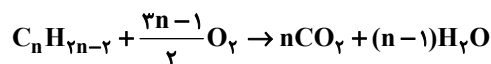
گاز اتن اولین عضو خانواده آلکن‌هاست نه دومین عضو!

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۱۱۹ - گزینه «۴»

(آترین صبا)

معادله سوختن کامل آلکین‌ها به صورت زیر است:



$$? \text{ g } H_2O = \frac{(n-1) \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol آلکین}} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O}$$

$$= 27 \text{ g } H_2O \Rightarrow n = 4$$

$$C_4H_6 \Rightarrow H \text{ درصد جرمی } = \frac{6 \times 1}{(4 \times 12) + (6 \times 1)} \times 100 \approx 11\%$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه ۴۲)

۱۲۰ - گزینه «۴»

(مهمرسین صادقی مقدم)

نفت سنگین کشورهای عربی در دمای اتاق کمتر از نفت برنت دریای شمال

تمایل به جاری شدن دارد زیرا از مولکول‌های بزرگ‌تری تشکیل شده است و

گرانروی بیشتری دارد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۳۴، ۳۵، ۳۶ و ۳۷)



شیمی ۱

۱۲۱- گزینه «۲»

(میثم نوری)

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) طبق مدل کوانتومی ساختاری لایه‌ای برای اتم ارائه شد.

(۳) در گستره مرئی از طیف نشری خطی به دست آمده از اتم‌های هیدروژن، وجود چهار خط یا نوار رنگی با طول موج و انرژی معین، تأیید شده است.

(۴) نیلز بور بر این باور بود که از بررسی تعداد و جایگاه نوارهای رنگی در طیف نشری خطی اتم هیدروژن، می‌توان اطلاعات ارزشمندی از ساختار اتم هیدروژن به دست آورد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۲۲- گزینه «۱»

(محمدرضا پورماویر)

با دور شدن لایه‌ها از هسته اتم، سطح انرژی آن‌ها افزایش ولی اختلاف سطح انرژی آن‌ها کاهش می‌یابد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۲۳- گزینه «۱»

(علی ممبیدی)

بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) ۷ عنصر ستون اول و ۶ عنصر گروه دوم به همراه هلیوم از گروه ۱۸ام، عناصر دسته S را تشکیل می‌دهند. (۱۴ عنصر) همچنین در دوره سوم جدول تناوبی ۸ عنصر وجود دارد؛ بنابراین اختلاف خواسته شده برابر ۶ است.

(ب) زیرلایه ۳d در لایه سوم است اما در عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی، الکترونی وارد آن نمی‌شود. الکترون‌گیری این زیرلایه در عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی انجام می‌شود.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۲۴- گزینه «۲»

(مسمن رمضانی کوکنده)

بررسی همه موارد:

(آ) برای این سه زیرلایه، $n+1$ برابر است. بنابراین هر کدام که n کوچک‌تری داشته باشد، انرژی کمتری داشته و زودتر پر می‌شود. بنابراین:

$$5f < 6d < 7p$$

$$5f > 6d > 7p$$

(ب) مجموعه‌ای از زیرلایه‌ها با n برابر (به عنوان مثال ۳s, ۳p, ۳d) یک لایه الکترونی را تشکیل می‌دهند.

(پ) پنجمین زیرلایه (g)، ظرفیت پذیرش حداکثر ۱۸ الکترون را دارد.

$$18 = 2 + 4(4) \xrightarrow{l=4} 2 + 14 = 16$$

(ت) در دوره چهارم جدول، فقط زیرلایه‌های ۴s و ۴p پر می‌شوند که حداکثر ۸ الکترون دریافت می‌کنند.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۲۵- گزینه «۱»

(سهراب صادقی زاده)

در ۳۶ عنصر موجود در دوره‌های اول تا چهارم جدول تناوبی، آرایش الکترونی عنصرهای دسته‌های s و d به زیرلایه S ختم می‌شود که شامل ۱۸ عنصر می‌باشند.

در عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی، در آرایش الکترونی عنصرهای پتاسیم، منگنز، مس و آرسنیک، تنها یک زیرلایه نیمه‌پر وجود دارد. دقت کنید که عنصر کروم، دو زیرلایه نیمه‌پر دارد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۱۲۶- گزینه «۴»

(مجتبی ممبوی)

عنصر مورد نظر عنصر ۲۹ Cu می‌باشد.

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) آرایش الکترونی این عنصر از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.

(۲) جزو فلزات واسطه است و آرایش الکترونی آن به زیرلایه ۴s ختم می‌شود.

(۳) در دوره چهارم جدول قرار دارد و نهمین فلز واسطه دوره خود است نه نهمین فلز دوره خود.

(۴) اختلاف عدد اتمی ۲۹ Cu با گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی ۳۶ Kr کمتر از اختلاف عدد اتمی آن با گاز نجیب دوره قبل از خود یعنی ۱۸ Ar است.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)



۱۲۷- گزینه «۲»

(علیرضا کیانی دوست)

با توجه به اطلاعات ارائه شده عنصر X همان ${}_{35}\text{Br}$ است. عبارت دوم نادرست است. شمار جفت الکترون‌ها در آرایش الکترون - نقطه‌ای این عنصر برابر ۳ است.

(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۰)

۱۲۸- گزینه «۲»

(هری بهاری پور)

فرمول شیمیایی کلسیم فسفید Ca_3P_2 است و نسبت شمار کاتیون به آنیون در آن $\frac{۳}{۲}$ است.

بررسی موارد:



پس در موارد «الف» و «ت» نسبت شمار کاتیون به آنیون در ترکیبات ارائه شده در آن‌ها با این نسبت در کلسیم فسفید برابر نیست.

(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۱۲۹- گزینه «۴»

(میثم کوثری لشکری)

عبارت‌های «آ» و «ت» نادرست هستند.

(آ) در این دوره ${}_{20}\text{Ca}$ و همهٔ عنصرهای واسطه به جز ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{29}\text{Cu}$ که شامل ۸ عنصر هستند دارای زیرلایهٔ ${}_{4s}^2$ به عنوان آخرین زیرلایه خود هستند و ${}_{36}\text{Kr}$ هم با آرایش ${}_{4p}^6$ در آخرین زیرلایه خود، همگی در آخرین زیرلایه از الکترون پر هستند که مجموعاً ۱۰ عنصر هستند.

ب) عنصرهای ${}_{19}\text{K}$ و ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{29}\text{Cu}$ در آخرین زیرلایه خود آرایش ${}_{4s}^1$ و ${}_{31}\text{Ga}$ آرایش ${}_{4p}^1$ دارند.

پ) ($l=2$ یعنی زیر لایه d) دو عنصر ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{25}\text{Mn}$ به ترتیب با آرایش ${}_{18}\text{Ar}[{}_{3d}^5{}_{4s}^1]$ و ${}_{18}\text{Ar}[{}_{3d}^5{}_{4s}^2]$ ویژگی مورد نظر را دارند و ۵ الکترون در ${}_{3d}$ دارند.

ت) در مجموع ۸ عنصر دارای زیرلایهٔ پر با $n+l=5$ هستند. (${}_{3d}$ و ${}_{4p}$ دارای این ویژگی هستند) از عنصر ${}_{29}\text{Cu}$ به بعد در ${}_{3d}$ ، ۱۰ الکترون وجود دارد یعنی از گروه ۱۱ تا ۱۸ که شامل ۸ عنصر است. (عنصر گروه ۱۸ یعنی ${}_{36}\text{Kr}$ دارای آرایش ${}_{4p}^6$ در زیرلایه آخر است و دو زیرلایهٔ کاملاً پر با $n+l=5$ دارد).

(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۳۰- گزینه «۴»

(امیر ماتیان)

عنصر C همان آرگون است. بنابراین عنصر A گوگرد، B کبر، D پتاسیم و E کلسیم است.

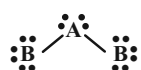
چون A از گروه ۱۶ بوده یون پایدار آن به صورت A^{2-} است و D عنصری از گروه ۱ می‌باشد که یون پایدار آن به صورت D^+ است. لذا داریم:

$$\text{D}^+ + \text{A}^{2-} \Rightarrow \text{D}_2\text{A}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) درست؛ چون عناصر D و E در گروه ۱ و ۲ جدول تناوبی قرار دارند لذا از عناصر دسته S می‌باشند.

(۲) درست؛ A در گروه ۱۶ و B در گروه ۱۷ قرار دارد و در مولکول AB_2 عنصر A اتم مرکزی می‌باشد.



(۳) درست؛ عنصر B همان ${}_{17}\text{Cl}$ می‌باشد که با رسم آرایش الکترونی آن داریم:

$${}_{17}\text{Cl}: {}_{4s}^2 {}_{3s}^2 {}_{3p}^4 {}_{3d}^5$$

در لایهٔ ظرفیت آن Ve^- وجود دارد.

(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۱)



شیمی ۳

۱۳۱- گزینه «ا»

(علی بری)

موارد «الف» و «ب» درست است.

بررسی موارد:

الف) درست؛ آب گل آلود و شربت معده هر دو مخلوط‌هایی ناپایدار و

سوسپانسیون هستند که در صورت توقف هم زدن آن‌ها، ته‌نشین می‌شوند.

ب) درست؛ ذرات موجود در مخلوط کلوئید و محلول برخلاف سوسپانسیون

در آب ته‌نشین نمی‌شوند و پایدار هستند.

پ) نادرست؛ مخلوط پایدار شده آب و روغن با استفاده از صابون، کلوئید است.

ت) نادرست؛ ذره‌های تشکیل‌دهنده سوسپانسیون پس از مدتی ته‌نشین

می‌شوند در نتیجه سوسپانسیون پایدار نیست.

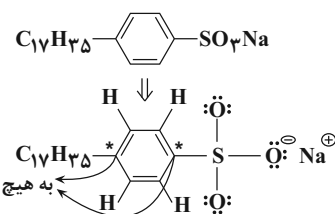
(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶ و ۷)

(برگرفته از فور را بیازماید صفحه ۷)

۱۳۲- گزینه «ب»

(ارژنگ فائزگی)

ساختار پاک‌کننده به صورت زیر است:



به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست.

بررسی برخی از گزینه‌ها:

۳(۱۶)

$$\frac{418}{23(12)} \approx 0.17$$

گزینه «۲»: نسبت خواسته شده برابر است با:

گزینه «۴»: در ساختار این صابون، ۲ اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم

هیدروژنی متصل نیست.

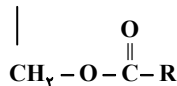
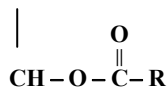
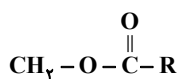
(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱۳۳- گزینه «ب»

(مجتبی محبوب)

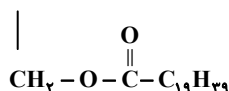
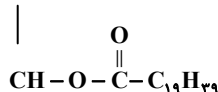
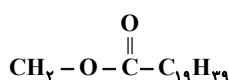
با توجه به ساختار کلی استرهای بلند زنجیر سه عاملی که به صورت زیر

است، می‌توان تعداد کربن‌های گروه‌های R را به صورت زیر حساب کرد:



$$\text{R} \text{ تعداد کربن‌های گروه } = \frac{63-6}{3} = 19$$

بنابراین فرمول ساختاری استر بلند زنجیر با ۶۳ اتم کربن به صورت زیر است

و جرم مولی این ترکیب برابر $974 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ می‌باشد.

با توجه به ساختار استر بلند زنجیر می‌توان نتیجه گرفت که از واکنش این

استر با سدیم هیدروکسید کافی، صابونی با فرمول $\text{C}_{19}\text{H}_{39}\text{COONa}$

تولید می‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

(امیر فاطمیان)

۱۳۴- گزینه «ب»

بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۲) درست؛ با افزایش دما، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش می‌یابد و

یا با افزایش دما مقدار درصد لکه باقی‌مانده کاهش می‌یابد.

۳) درست؛ هر چه مقدار صابون در آب بیشتر باشد، کف ایجاد شده بیشتر

می‌شود. (هنگامی که صابون حل شده در آب به یک مقدار مشخص برسد،

ارتفاع کف تغییری نمی‌کند.)

۴) نادرست؛ هر چه مقدار صابون بیشتر باشد مقدار پاک‌کنندگی نیز افزایش

می‌یابد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

(برگرفته از فور را بیازماید صفحه ۹)



۱۳۵- گزینه «۴»

(علیرضا کیانی دوست)

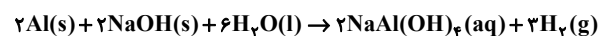
پاک کننده غیرصابونی نوعی پاک کننده خورنده نیست و فقط از راه برهم کش با ذرات در پاک سازی آلاینده ها نقش دارد.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۰ تا ۱۲)

۱۳۶- گزینه «۲»

(فسین ناصری ثانی)

معادله موازنه شده واکنش:



پس مجموع ضرایب مواد شرکت کننده پس از موازنه برابر ۱۵ است.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه ۱۳)

۱۳۷- گزینه «۳»

(مهمرضا پوریاوید)

اتیلن گلیکول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$) و اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) به صورت مولکولی در آب حل می شوند و موادی اسیدی یا بازی به شمار نمی آیند. در حالی که کربن دی اکسید (CO_2) با حل شدن در آب غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می دهد و یک اسید آرنیوس خواهد بود. همچنین انحلال منیزیم کلرید در آب باعث تغییر در غلظت یون های هیدرونیوم و هیدروکسید در آب نمی شود.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۳ تا ۱۶)

(برگرفته از با هم بیندیشیم صفحه های ۱۴ و ۱۵)

۱۳۸- گزینه «۱»

(فرزاد رضایی)

ابتدا غلظت مولی HX را با استفاده از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$M = \frac{10 \text{ a d}}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 15 \times 0.8}{150} = 0.8 \text{ mol.L}^{-1}$$

اکنون با استفاده از جدول تغییر غلظت داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{HX} & \rightleftharpoons & \text{H}^+ & + & \text{X}^- & & \\ 0.8 & & 0 & & 0 & & x = M\alpha \\ 0.8 - x & & x & & x & & x = 0.8 \times 0.01 = 0.008 \end{array}$$

$$\frac{\text{مجموع غلظت یون ها}}{\text{غلظت اولیه HX}} = \frac{2x}{0.8} = \frac{2 \times 0.008}{0.8} = 0.02$$

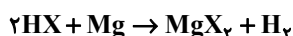
(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۷ تا ۱۹)

۱۳۹- گزینه «۲»

(امیرحسین طیبی)

بررسی همه گزینه ها:

(۱) از واکنش اسید با فلزات گاز هیدروژن آزاد می شود.



(۲) اسید قوی تر هنگام واکنش با فلز با سرعت بیشتری گاز هیدروژن آزاد می کند؛ در نتیجه محلول (آ) اسید قوی تر و دارای ثابت یونش بزرگ تر است.

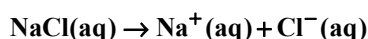
(۳) هر چه اسید قوی تر باشد هنگام یونش یون های بیشتری تولید کرده و باعث افزایش رسانایی محلول می شود.

(۴) فورمیک اسید نسبت به نیتریک اسید، اسید ضعیف تر است.

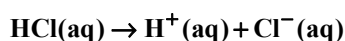
(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۶ تا ۲۴)

۱۴۰- گزینه «۲»

(همید زهی)

غلظت یون های محلول (I) برابر 0.04 مولار است.

$$0.02 \text{ mol.L}^{-1} \quad 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$

غلظت یون های محلول (II) برابر 0.032 مولار خواهد بود.

$$0.016 \text{ mol.L}^{-1} \quad 0.016 \text{ mol.L}^{-1}$$

در محلول (III):

$$\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M_{\text{اسید}}} \times 100 \Rightarrow \alpha = \frac{[\text{H}^+]}{0.06} \times 100$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+] = [\text{A}^-] = 0.012$$

غلظت کل یون ها 0.024 مولار خواهد بود.

در محلول (IV)، رسانایی الکتریکی صفر است چون اتانول غیرالکترولیت می باشد.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۶ تا ۱۹)